PUC-Rio – Análise de Estruturas II – *Luiz Fernando Martha*

Método dos Deslocamentos

Convenções de sinais

Soluções fundamentais para barras isoladas

Exemplo de solução de uma viga contínua

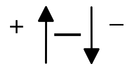
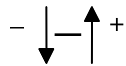
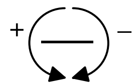
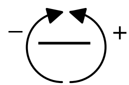
Convenções de sinais do Método dos Deslocamentos

Deslocamentos e rotações
Forças e momentos externos

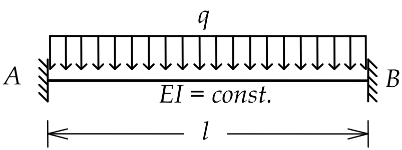
Deslocamentos horizontais	+	−
Deslocamentos verticais	+	−
Rotações	+	−
Forças horizontais	+	−
Forças verticais	+	−
Momentos	+	−

Convenções de sinais do Método dos Deslocamentos

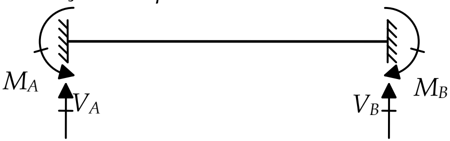
Esforços internos em extremidades de barra (nas direções dos eixos locais)

Esforços axiais em extremidades de barra		
Esforços cortantes em extremidades de barra		
Momentos fletores em extremidades de barra		

Soluções fundamentais de reações de engastamento locais
Viga biengastada com força transversal uniformemente distribuída



Reações de apoio e seus sinais:



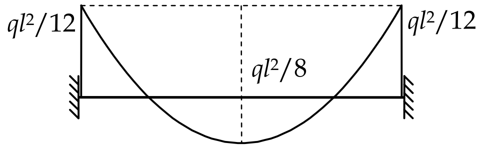
$V_A = +ql/2$

$V_B = +ql/2$

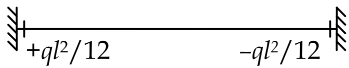
$M_A = +ql^2/12$

$M_B = -ql^2/12$

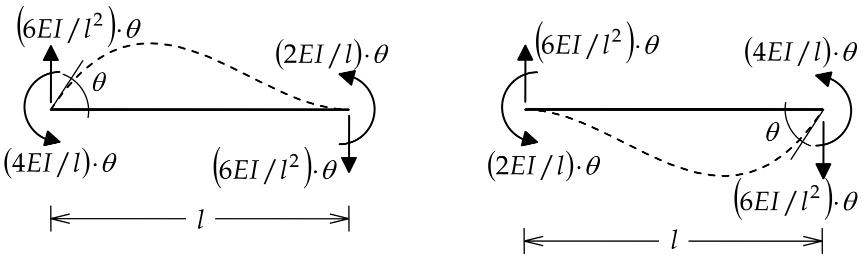
Diagrama de momentos fletores:
(traçado do lado das fibras tracionadas)



Indicação dos momentos fletores usando a convenção de sinais:

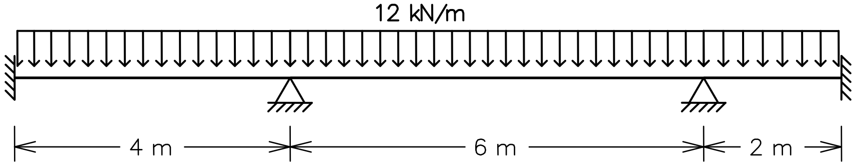


Soluções fundamentais de coeficientes de rigidez locais
Coeficientes de rigidez à rotação de barra isolada



Indicação dos momentos fletores usando a convenção de sinais:

Exemplo de solução de uma viga contínua



Parâmetro de rigidez à flexão:

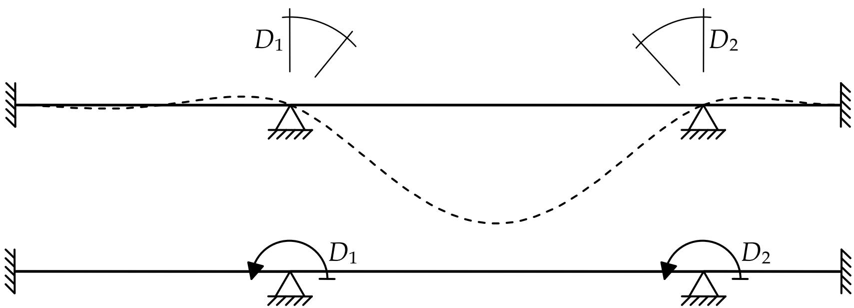
$EI = 1.2 \text{x} 10^4$ kNm^2

Método dos Deslocamentos

Incógnitas:

Deslocabilidades: são os parâmetros que definem (completamente) a configuração deformada de uma estrutura.

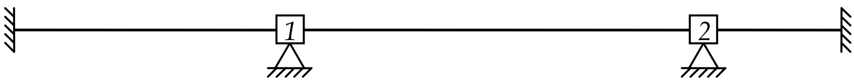
Deslocabilidades: são as componentes de deslocamentos e rotações nodais que estão livres, isto é, que devem ser conhecidas para determinar a configuração deformada de uma estrutura.



Método dos Deslocamentos

Estrutura auxiliar utilizada nos casos básicos:

Sistema Hipergeométrico (SH):
Estrutura cinematicamente determinada (estrutura com configuração deformada conhecida) obtida da estrutura original pela adição dos vínculos necessários para impedir as deslocabilidades.



Método dos Deslocamentos

Metodologia:
Superpor uma série de soluções cinematicamente determinadas (configurações deformadas conhecidas) – **casos básicos** – que satisfazem as condições de compatibilidade da estrutura para obter uma solução final que também satisfaz as condições de equilíbrio.

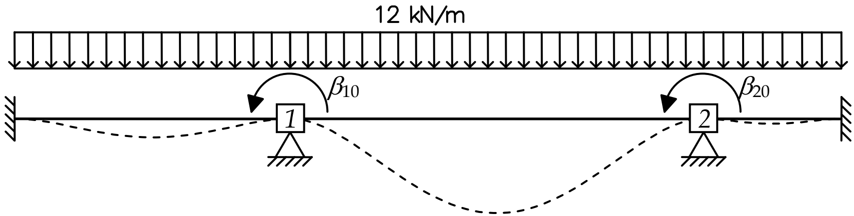
Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH

Caso (1) – Deslocabilidade D_1 *isolada no SH*

Caso (2) – Deslocabilidade D_2 *isolada no SH*

Método dos Deslocamentos
Superposição de casos básicos

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH

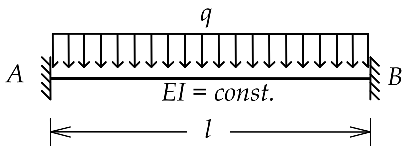


Termos de carga:

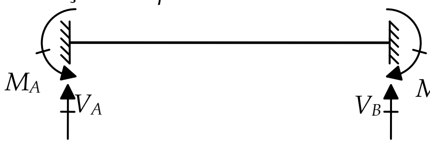
Forças e momentos (reações) nos apoios fictícios do SH provocados pela solicitação externa (carregamento).

$\beta_{i0} \rightarrow$ reação no apoio fictício associado à deslocabilidade D_i para equilibrar o SH quando atua a solicitação externa isoladamente, isto é, com deslocabilidades com valores nulos (situação de engastamento perfeito).

Solução fundamental de engastamento perfeito local



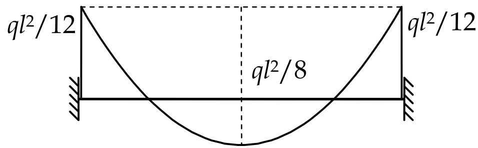
Reações de apoio e seus sinais:



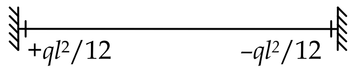
$V_A = +ql/2$ $\qquad$ $V_B = +ql/2$

$M_A = +ql^2/12$ $\qquad$ $M_B = -ql^2/12$

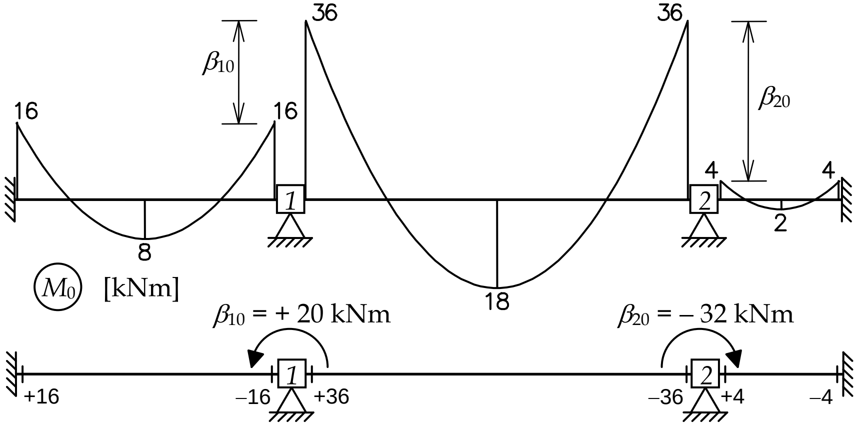
Diagrama de momentos fletores:
(traçado do lado das fibras tracionadas)



Indicação dos momentos fletores usando a convenção de sinais:



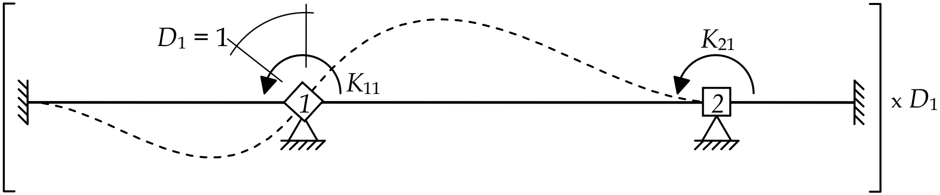
Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH



$$\beta_{10} = -\,q4^2/12 + q6^2/12 = -\,16 + 36 = +\,20 \text{ kNm;}$$

$$\beta_{20} = -\,q6^2/12 + q2^2/12 = -\,36 + 4 = -\,32 \text{ kNm.}$$

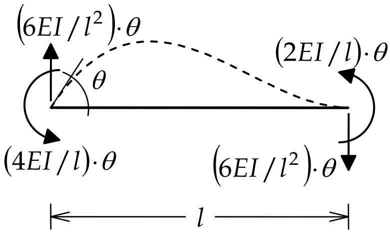
Caso (1) – Deslocabilidade D_1 isolada no SH

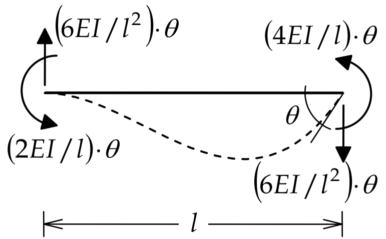


Coeficientes de rigidez globais K_{ij} ***:***

$K_{i1} \rightarrow$ Força ou momento que deve atuar na direção de D_i para manter a estrutura (na verdade, o SH) em equilíbrio quando é imposta uma configuração deformada onde $D_1 = 1$ e as demais deslocabilidades são nulas.

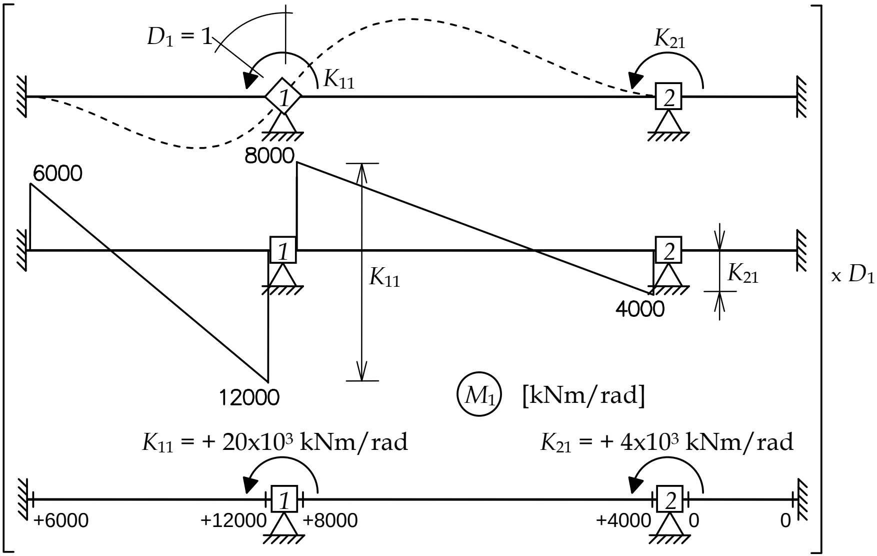
Soluções fundamentais de coeficientes de rigidez locais





Indicação dos momentos fletores usando a convenção de sinais:

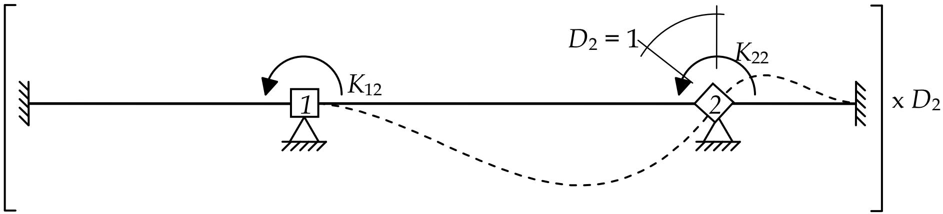
Caso (1) – Deslocabilidade D_1 isolada no SH



K_{11} = + 4EI/4 + 4EI/6 = + 12000 + 8000 = + 20000 kNm/rad;

K_{21} = + 2EI/6 = + 4000 kNm/rad.

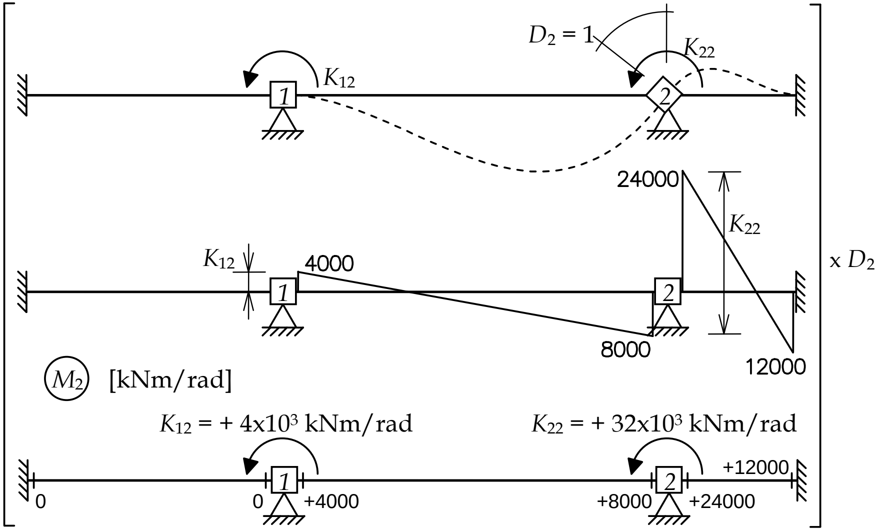
Caso (2) – Deslocabilidade D_2 isolada no SH



Coeficientes de rigidez globais K_{ij} ***:***

$K_{i2} \rightarrow$ Força ou momento que deve atuar na direção de D_i para manter a estrutura (na verdade, o SH) em equilíbrio quando é imposta uma configuração deformada onde $D_2 = 1$ e as demais deslocabilidades são nulas.

Caso (2) – Deslocabilidade D_2 isolada no SH



$K_{12} = + 2EI/6 = + 4000$ kNm/rad;

$K_{22} = + 4EI/6 + 4EI/2 = + 8000 + 24000 = + 32000$ kNm/rad.

Método dos Deslocamentos

Equações finais

Cada caso básico satisfaz condições de equilíbrio através de forças e momentos externos **espúrios**, que são introduzidas pelos **apoios fictícios** do SH.

Portanto, **cada caso básico não satisfaz o equilíbrio da estrutura original**, pois esta não tem os apoios fictícios do SH.

As **equações finais** do método são equações de equilíbrio expressas em termos das deslocabilidades. Essas equações **recompõem as condições de equilíbrio da estrutura original violadas nos casos básicos**.

Método dos Deslocamentos

Equações finais

- Somatório dos momentos externos que atuam no primeiro nó interior é nulo:

$$\beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 = 0$$

- Somatório dos momentos externos que atuam no segundo nó interior é nulo:

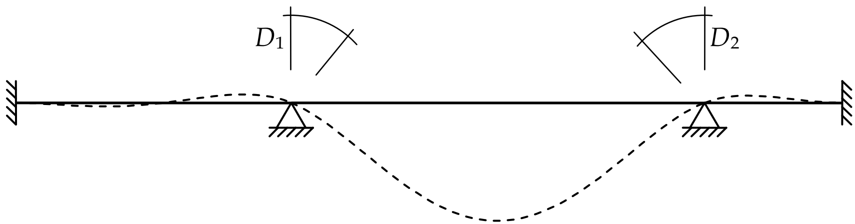
$$\beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 = 0$$

Método dos Deslocamentos

Solução dos sistema final de equações de equilíbrio

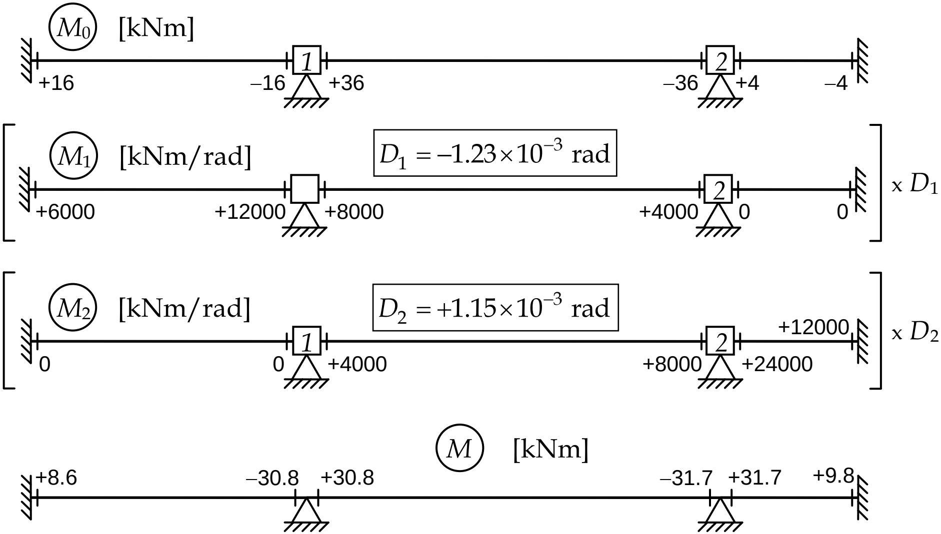
$$\begin{cases} \beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 = 0 \\ \beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} +20 \\ -32 \end{Bmatrix} + 10^3 \begin{bmatrix} +20 & +4 \\ +4 & +32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_1 = -1.23 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ D_2 = +1.15 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{cases}.$$

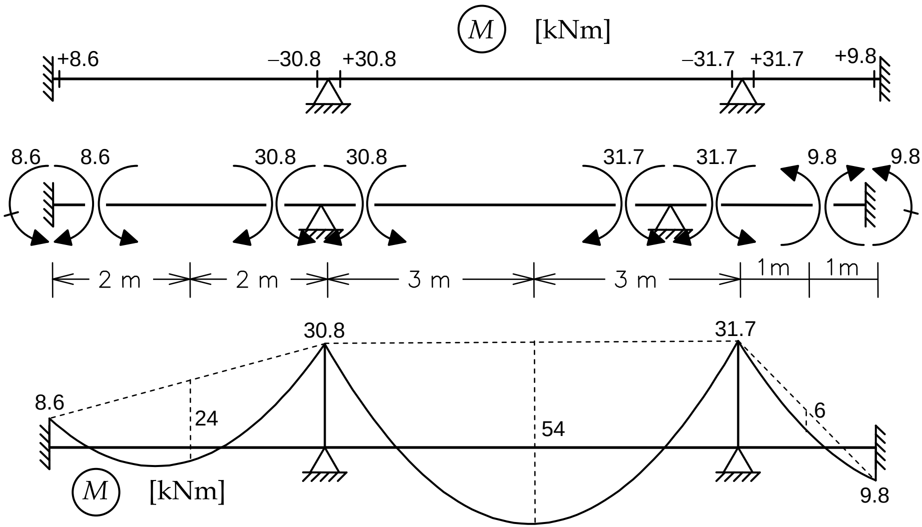


Determinação dos momentos fletores finais

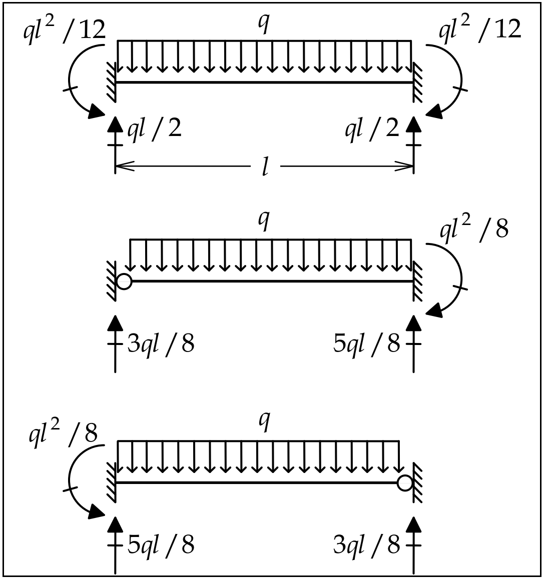
$$M = M_0 + M_1 \cdot D_1 + M_2 \cdot D_2 \;\; \Rightarrow M = M_0 - 1.23\text{x}10^{-3} \cdot M_1 + 1.15\text{x}10^{-3} \cdot M_2.$$

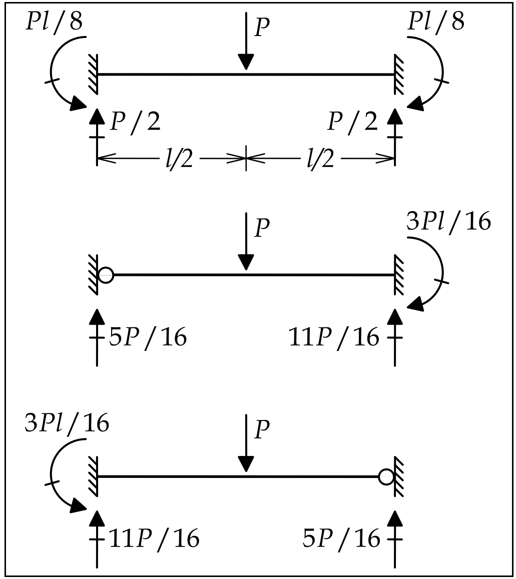


Traçado do diagrama de momentos fletores finais da forma usual: do lado da fibra tracionadas

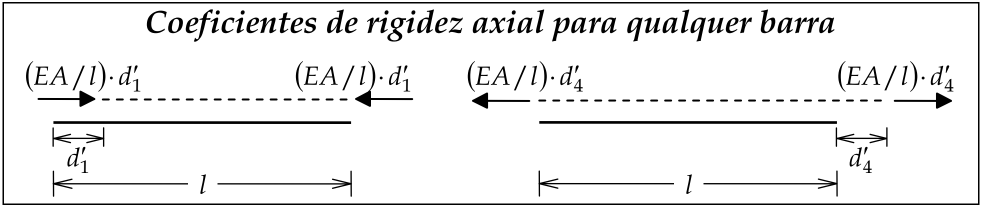


Reações de engastamento de barras isoladas

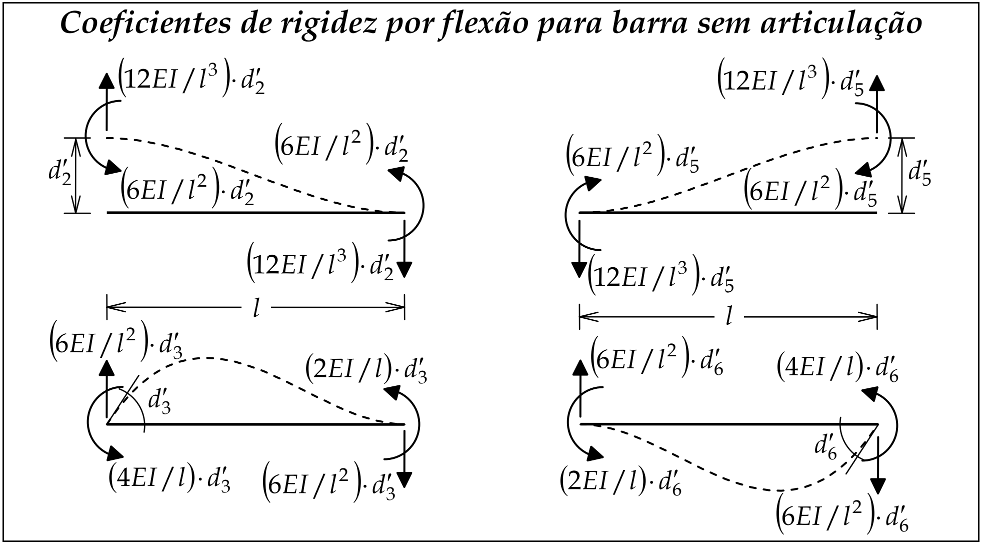




Coeficientes de rigidez locais no sistema de eixos locais

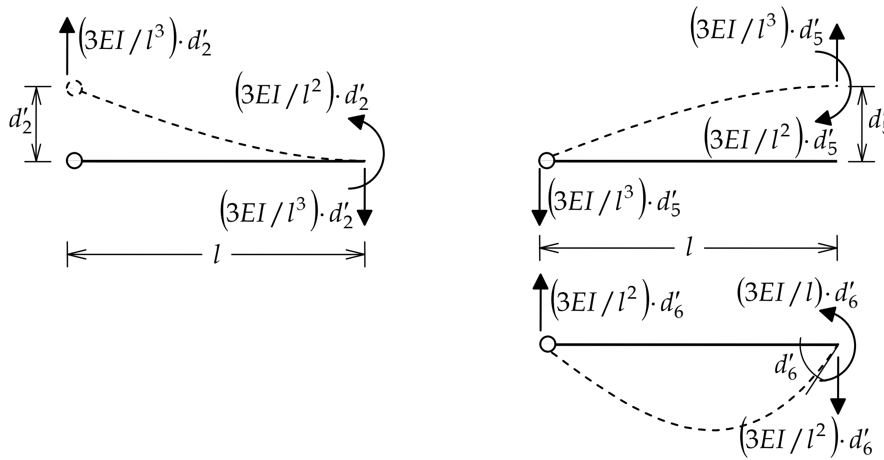


Coeficientes de rigidez locais no sistema de eixos locais



Coeficientes de rigidez locais no sistema de eixos locais

Coeficientes de rigidez por flexão para barra com articulação na esquerda



Coeficientes de rigidez locais no sistema de eixos locais

Coeficientes de rigidez por flexão para barra com articulação na direita