

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro — PUC-Rio
Departamento de Engenharia Civil

NOTAS DE AULA DO CURSO

CIV 2118 – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Luiz Fernando Martha

Rio de Janeiro, Agosto de 1994

CIV 2118 – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Prof.: Luiz Fernando Martha

Sala: 319-L e ICAD, no prédio do ITS (anexo ao RDC)

Referências Básicas:

1. Cook, R.D., Malkus, D.S., and Plesha, M.E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, Terceira Edição, John Wiley & Sons, 1989.
2. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The Finite Element Method – Volume 1 Basic Formulation and Linear Problems*, Quarta Edição, McGraw-Hill, 1989.

Referências Adicionais:

3. Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, 1987.
4. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The Finite Element Method – Volume 2 Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-linearity*, Quarta Edição, McGraw-Hill, 1991.
5. Szabó, B. and Babuska, I., *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, 1991.
6. Bathe, K.-J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, 1982.
7. Burnett, D.S., *Finite Element Analysis – From Concepts to Applications*, Addison-Wesley, 1987.
8. Gallagher, R.H., *Finite Element Analysis: Fundamentals*, Prentice-Hall, 1975.
9. Strang, G. and Fix, G.J., *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1973.
10. McGuire, W. and Gallagher, R.H., *Matrix Structural Analysis*, John Wiley & Sons, 1979.
11. Desai, C.S. and Abel, J.F., *Introduction to the Finite Element Method*, Van Nostrand-Reinhold, 1972.
12. Tauchert, T.R., *Energy Principles in Structural Mechanics*, McGraw-Hill, 1974.
13. Martha, L.F., *O Método da Rigidez Direta sob um Enfoque Matricial*, apostila fornecida. Editada pela primeira vez pela Coordenação de Extensão e Treinamento Profissional – Escritório Técnico da Escola de Engenharia, UERJ, 1984.

MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE ESTRUTURAL

Marcelo Gattass e Luiz F. Martha

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é bastante difundido na prática de engenharia para analisar diversos tipos de problemas. Ele permite, por exemplo, o estudo dos deslocamentos e tensões em peças mecânicas, barragens, minas e estruturas das mais diversas formas, tais como: torres, edifícios e coberturas. Tal método é também utilizado para determinar percolação, adensamento, pressão neutra, fluxo de calor, e muitas outras análises utilizadas em engenharia. Todas as análises mencionadas têm em comum o fato que elas se baseiam na solução de um problema onde são estabelecidas equações diferenciais parciais relacionando variáveis de campo fundamentais dentro de um determinado domínio, tendo que satisfazer condições de restrições para as variáveis fundamentais e suas derivadas na fronteira do domínio.

O MEF pode ser interpretado como uma generalização dos procedimentos adotados em uma análise estrutural convencional de sistemas reticulados. De fato, a formulação matricial pelo Método dos Deslocamentos de estruturas aperticadas é o próprio MEF na sua formulação em deslocamentos. A diferença básica entre a análise de quadros e o MEF está no próprio modelo estrutural. Em ambos os casos o modelo estrutural é formado pela montagem de componentes ou elementos estruturais individuais. No primeiro caso, os elementos aparecem quase que naturalmente a partir da própria concepção da estrutura (Fig. 1.0-a). No segundo, a estrutura é modelada (idealizada) por um número finito de elementos (regiões) para representar um meio contínuo, exemplificado pela seção transversal de uma barragem de gravidade mostrada na Fig. 1.0-b.

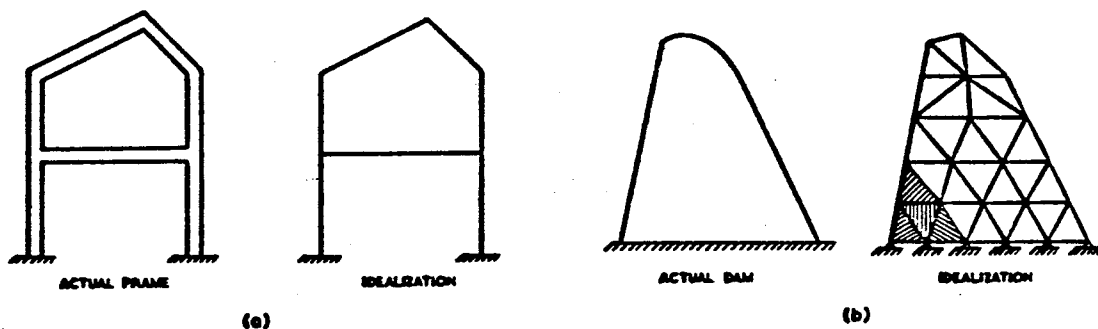


Fig. 1.0 – Idealizações de estruturas por elementos finitos [CLOU65], mostrando (a) elementos unidimensionais e (b) elementos bidimensionais.

1.1. CONSIDERAÇÕES SOBRE A GEOMETRIA DO MODELO

Tanto na análise estrutural de sistemas reticulados como na de meios contínuos, o objetivo é obter a solução para distribuições de tensões e deformações e o campo de deslocamentos em todo o domínio (em todos os pontos) da estrutura. Os problemas analisados podem variar desde treliças e quadros planos, distribuições de tensão em meios bidimensionais (chapas), sólidos com simetria axial, placas (lajes), quadros espaciais, cascas, até sólidos tridimensionais. No entanto, estes tipos de análises se diferem quanto à natureza da geometria do modelo estrutural (modelo matemático) adotado.

Os domínios dos modelos matemáticos adotados são definidos a partir da forma geométrica dos objetos e de hipóteses básicas sob o problema. A forma geométrica dos objetos é um dado do

problema e esta seção procura discutir algumas destas hipóteses básicas que modificam o domínio do MEF.

Em análises de tensões de objetos do tipo mostrado na Fig. 1.1, por exemplo, o domínio é bem próximo da forma real do objeto. Para estes problemas a definição do domínio das equações praticamente se confunde com a modelagem geométrica do sólido.

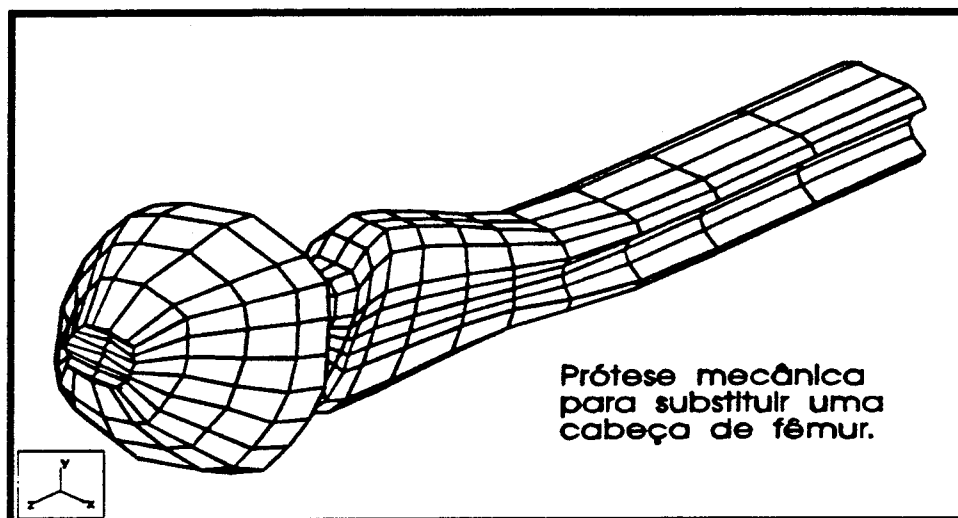


Fig. 1.1 - Domínio da equação diferencial e forma do objeto

Existem problemas, entretanto, em o domínio das equações diferenciais que modelam o comportamento de objetos tridimensionais é plano. Esta simplificação ocorre quando, por exemplo, a geometria do objeto pode ser descrita através do arrasto (*sweeping*) de uma seção transversal constante e a componente do campo que se pretende determinar possa ser suposto não variar na direção do arrasto. A Fig. 1.2 mostra exemplos onde a geometria do objeto é descrita por um arrasto ao longo de um segmento de reta e de um círculo.

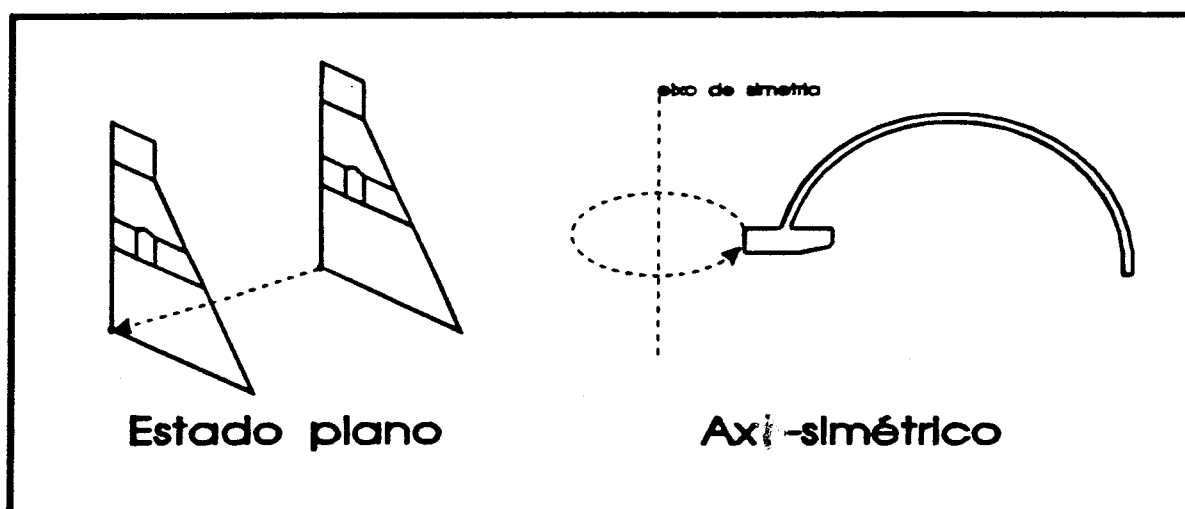


Fig. 1.2 - Modelos planos de objetos tridimensionais

As simplificações dos domínios nem sempre seguem hipóteses tão óbvias quanto as mostradas na Fig. 1.2. A análise estrutural, por exemplo, se baseia em três simplificações de geometria presentes nos modelos de barras, placas e cascas.

Barras são objetos caracterizados por uma seção transversal de dimensões pequenas quando comparadas com o seu comprimento. A análise de tensões em barras fletidas se baseia na hipótese de que seções transversais permanecem planas e ortogonais a curva definida pelo seu eixo. Esta hipótese foi primeiramente proposta pelo matemático holandês, Jacob Bernoulli (1645-1705), com um erro ilustrado na Fig. 1.3 (a seção é suposta girar em torno do base e não do centróide da seção).

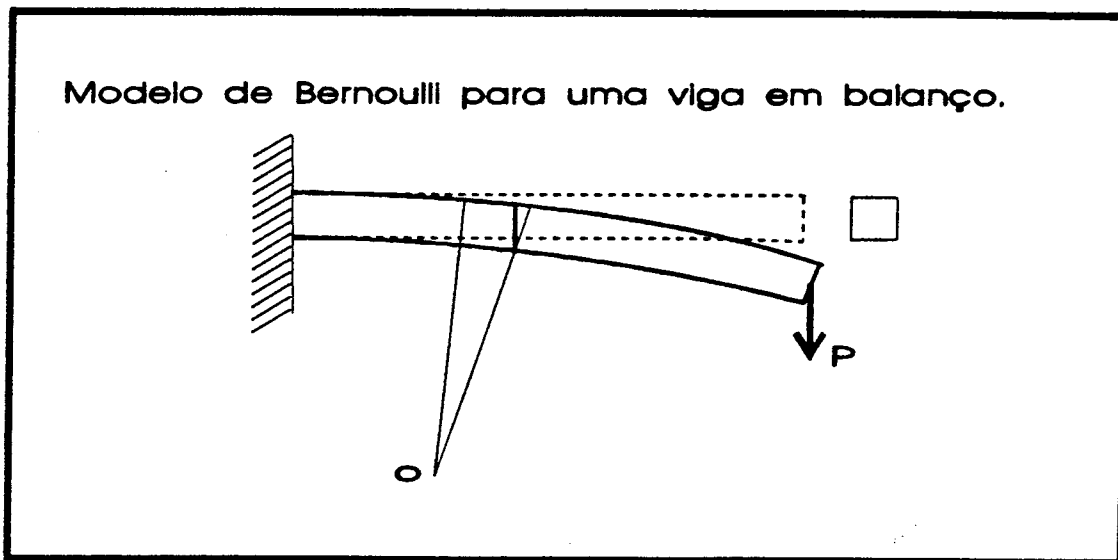


Fig. 1.3 - Hipótese de Bernoulli para barras fletidas

A hipótese correta (que pode ser comprovada experimentalmente), foi formulada pelo professor de engenharia francês, M. Navier (1785-1836). Esta hipótese define o campo de deslocamentos de uma barra fletida da forma ilustrada na Fig. 1.4.

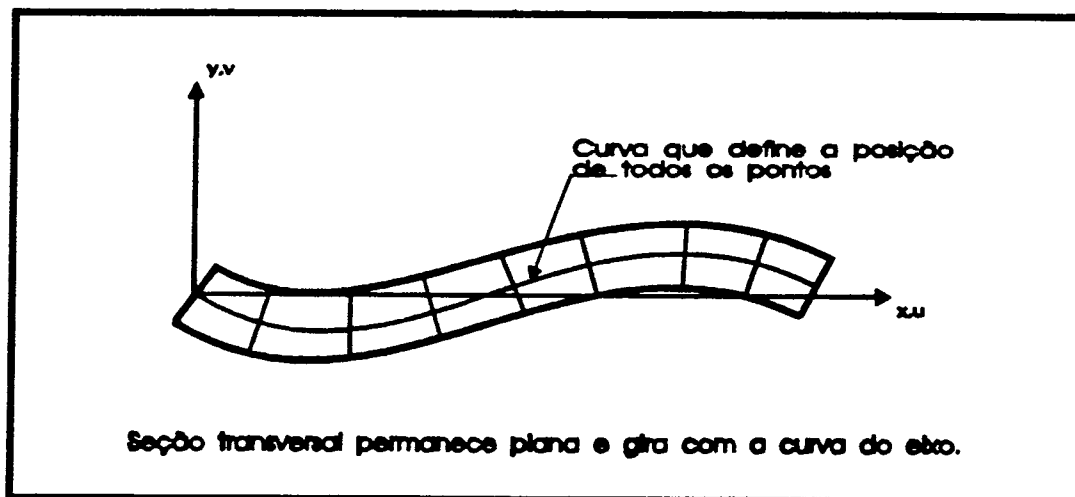


Fig. 1.4 - Deslocamentos de uma barra fletida

Com a hipótese de Bernoulli-Navier o campo de deslocamentos (u,v,w) de todos os pontos de uma barra fica definido pelo deslocamento da curva do centróide das seções. Com isto a equação diferencial que descreve o comportamento deste campo deixa de ser parcial e torna-se ordinária. A descrição dos deslocamentos de uma curva cúbica a partir da extremidade e a continuidade do campo de deslocamentos entre elementos (curvas) requerem, entretanto, a utilização de rotações como medidas de deslocamentos. Na mecânica de pequenos deslocamentos estas rotações são aproximadas por derivadas de deslocamentos e tratadas como vetores (comutativas). Toda estas simplificações permitem que estruturas da complexidade das ilustradas na Fig. 1.5 sejam corriqueiramente analisadas nos projetos de engenharia.

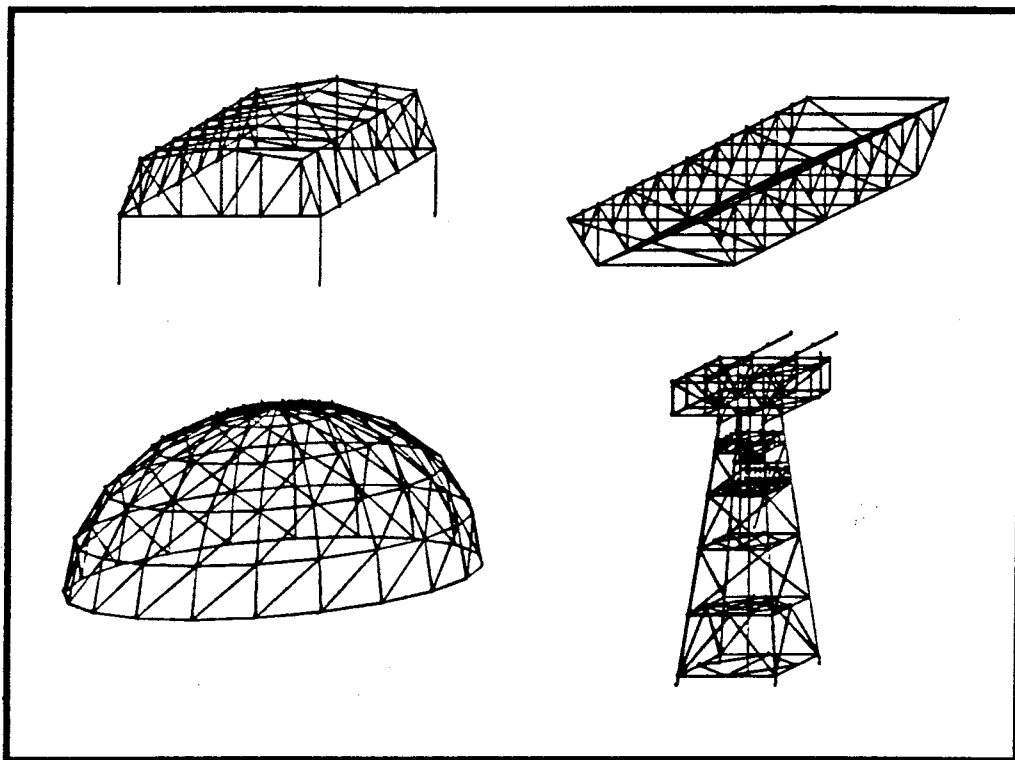


Fig. 1.5 - Exemplos de projetos baseados em modelos de barras

Uma outra simplificação de geometria importante é a que ocorre no estudo de placas e cascas. Placas e cascas são objetos com uma dimensão bem menor que as outras duas, como ilustra a Fig. 1.6.

A exemplo do que ocorre com os deslocamentos das barras que são descritos a partir da curva do centróide, os deslocamentos das placas e cascas são descritos a partir dos deslocamentos de sua superfície média. O alemão G. Kirchhoff foi quem primeiro estabeleceu, em 1850, a hipótese de que a normal da superfície média permanece reta e perpendicular à superfície após o deslocamento da placa, conforme ilustra a Fig.1.7. A equação parcial de placas e cascas é função das duas variáveis que descrevem a superfície média e sua discretização requer o uso de rotações para representar o campo de deslocamentos. As simplificações de geometria propostas nos modelos de placas e cascas permitem a análise de deslocamentos e tensões em pisos e em juntas tubulares de plataformas marítimas.

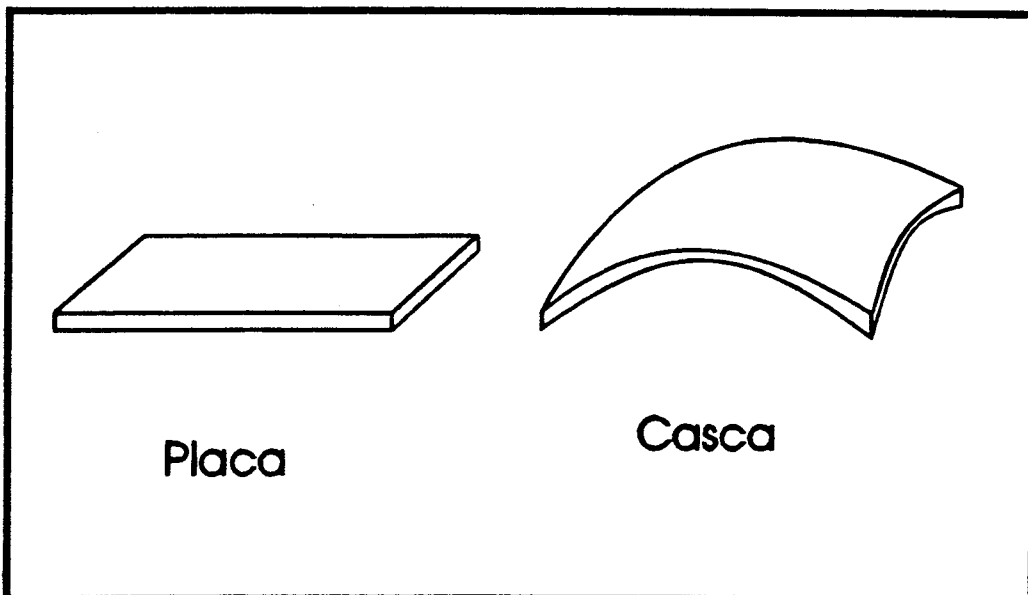


Fig. 1.6 - Geometria de placas e cascas

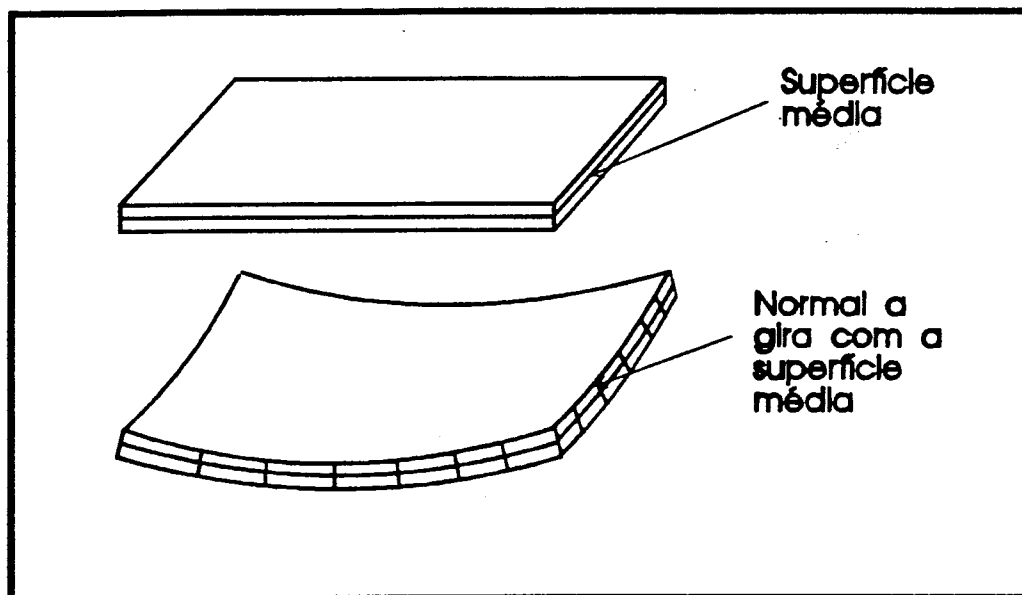


Fig. 1.7 - Hipótese de Kirchhoff para placas

Outros modelos de elementos finitos também apresentam domínios interessantes. São os casos, por exemplo, dos problemas com domínios: infinitos, com juntas (interfaces), com fronteira livre ou fratura. A Fig. 1.8 ilustra um modelo de escavação com domínio infinito. A fronteira externa do modelo é arbitrada em pontos onde o campo de deslocamentos podem ser supostos conhecidos.

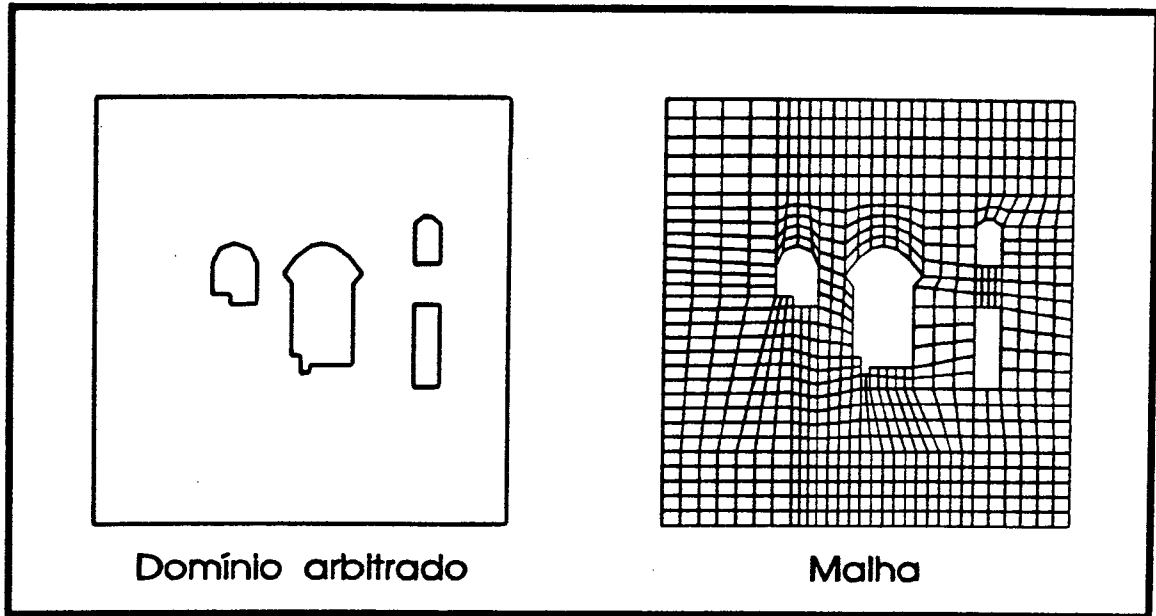


Fig 1.8 - Domínio infinito com fronteira arbitrada

Modelos com juntas procuram representar o comportamento mecânico das interfaces entre materiais presentes no modelo. Cada material é modelado por uma equação diferencial diferente e à interface é atribuído um comportamento que relaciona as grandezas de ambos os domínios. A Fig. 1.9 ilustra um problema de escavação com uma junta horizontal no meio do túnel.

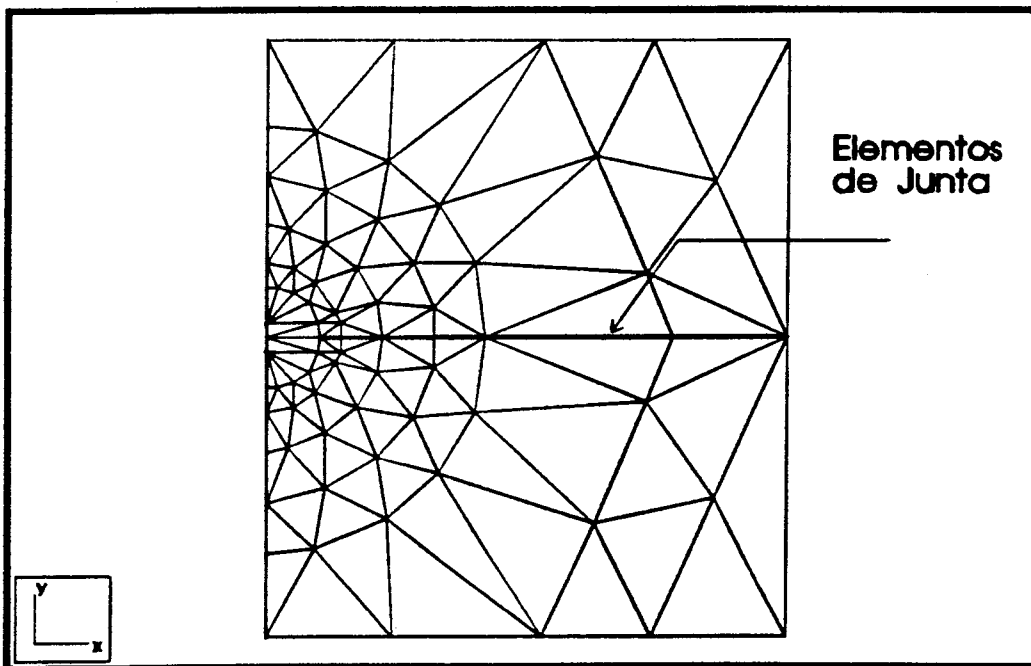


Fig. 1.9 - Modelo de escavação de túnel profundo com junta

Modelos com domínios com fronteira livre e modelos da mecânica da fratura, possuem a particularidade de redefinir o domínio da análise a medida que a análise progride. A Fig. 1.10 mostra a evolução do domínio em uma análise de mecânica da fratura.

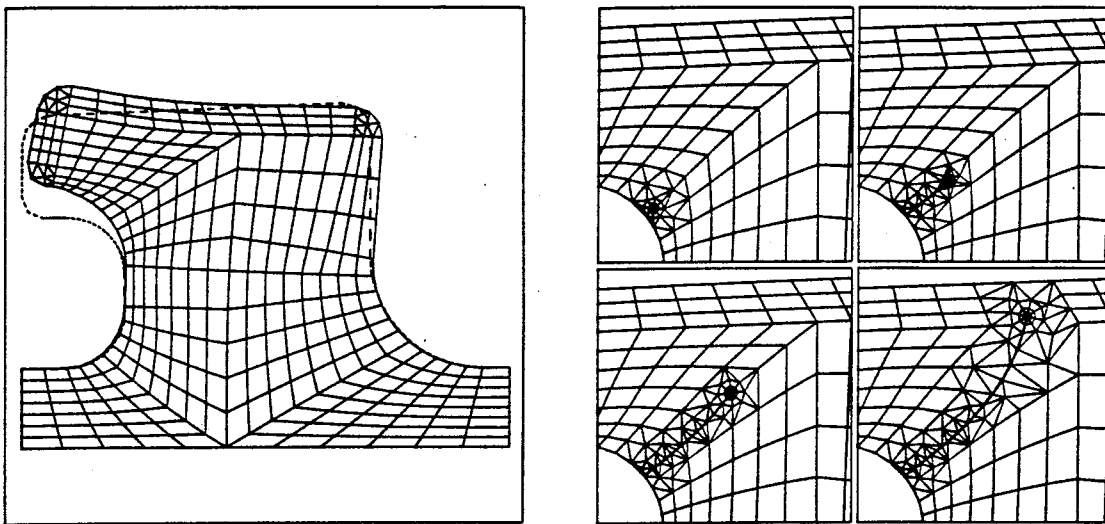


Fig. 1.10 - Domínios na análise de fratura [WAWR87]

1.2. DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO

De uma maneira geral pode-se dizer que a idéia central do método dos elementos finitos é subdividir os domínios da equação que descreve o fenômeno físico em pequenas regiões (elementos) onde o comportamento do campo possa ser aproximado por um polinômio de grau baixo. Este polinômio é escrito em função de valores do campo nos vértices (nós) destes elementos e estes valores (incógnitas do problema discreto) são determinados através da minimização de um funcional associado à equação diferencial. A Fig. 1.11 ilustra alguns tipos de elementos comumente encontrados na engenharia.

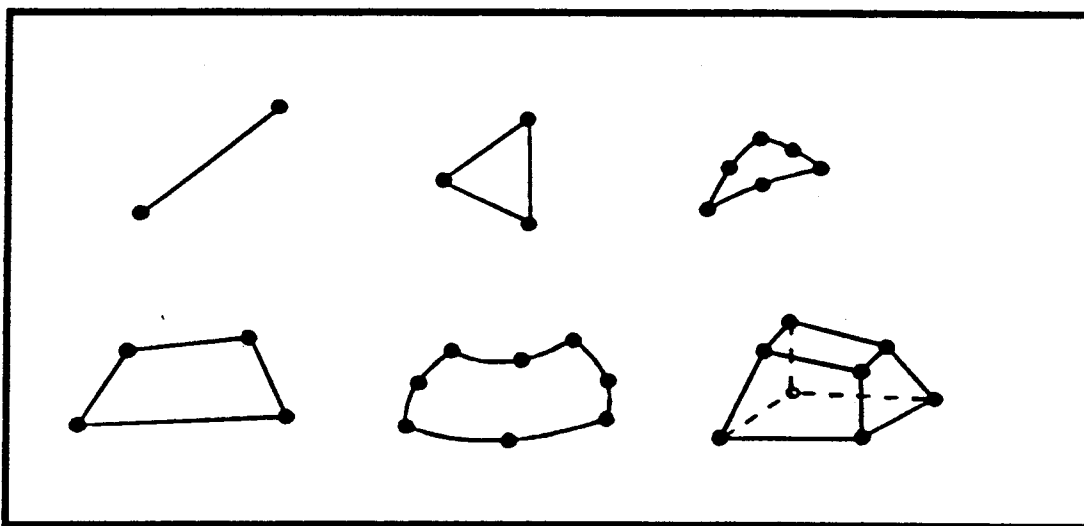


Fig. 1.11 - Elementos finitos

Ao longo das últimas três décadas, pesquisadores têm desenvolvido elementos finitos que produzem boas aproximações para as equações diferenciais encontradas nas simulações de engenharia. Atualmente, na análise estrutural, por exemplo, pode-se dizer que esta investigação já está concluída para os problemas lineares. A pesquisa para desenvolver elementos e formulações mecânicas que reproduzam o comportamento não linear de material e geometria, entretanto, continua.

As condições de convergência e a acurácia das soluções do método dos elementos finitos dependem não só da formulação dos elementos, mas também da malha gerada para analisar um determinado problema. Isto é, não basta se utilizar um programa bem desenvolvido com bons algoritmos numéricos e baseado em excelentes elementos. É preciso que a discretização feita para o domínio do problema em questão também seja adequada.

Programas de elementos finitos trabalham com a malha fornecida pelo usuário e não com o domínio das equações ou geometria dos objetos. A tarefa de subdividir o domínio em elementos, quase sempre não é nem mesmo verificada pelo programa. Esta responsabilidade recai toda sobre o usuário. Mais ainda, as condições de convergência de cada elemento finito raramente são especificadas pelo programa. Cabe ao usuário ter conhecimentos sobre os elementos fornecidos e suas formulações.

Explicitar as condições que garantam a convergência e acurácia de todas as soluções do método dos elementos finitos, está além do estado atual do conhecimento na área. Apesar disto, algumas considerações gerais podem ser enunciadas. Como o estudo de técnicas para geração da malhas é um dos objetivos deste texto, estas considerações são, na realidade, o objetivo central desta seção.

Existem basicamente dois tipos de condições: umas relativas à geometria dos elementos e outras relativas ao arranjo entre diversos elementos. Os elementos finitos são objetos de geometria quase sempre convexa e suas formulações tendem a privilegiar as formas mais regulares. Ou seja, elementos finitos triangulares são em geral melhores quanto mais se aproximam do triângulo equilátero. Quadrados são usualmente melhores que retângulos e estes melhores que paralelogramos, e assim por diante. A exigência de convexidade são oriundas da necessidade de inversão do Jacobiano da função que mapeia um domínio elementar do tipo $[-1,1] \times [-1,1]$ no domínio do elemento, conforme ilustra a Fig. 1.12(a). Na realidade, esta exigência de inversibilidade do Jacobiano é uma condição mais restritiva que a convexidade, mas existem casos em que o Jacobiano é inversível e o domínio do elemento não convexo. A Fig. 1.12(b) ilustra este caso.

Quanto às relações entre elementos, pode-se dizer em geral, que dois elementos e_i , e_j só podem se interceptar em uma face, uma aresta ou um vértice (nó), ou seja:

$$e_i \cap e_j = \begin{cases} \phi \\ \text{nó (vértice)} \\ \text{lado (aresta)} \\ \text{face} \end{cases} \quad (1.1)$$

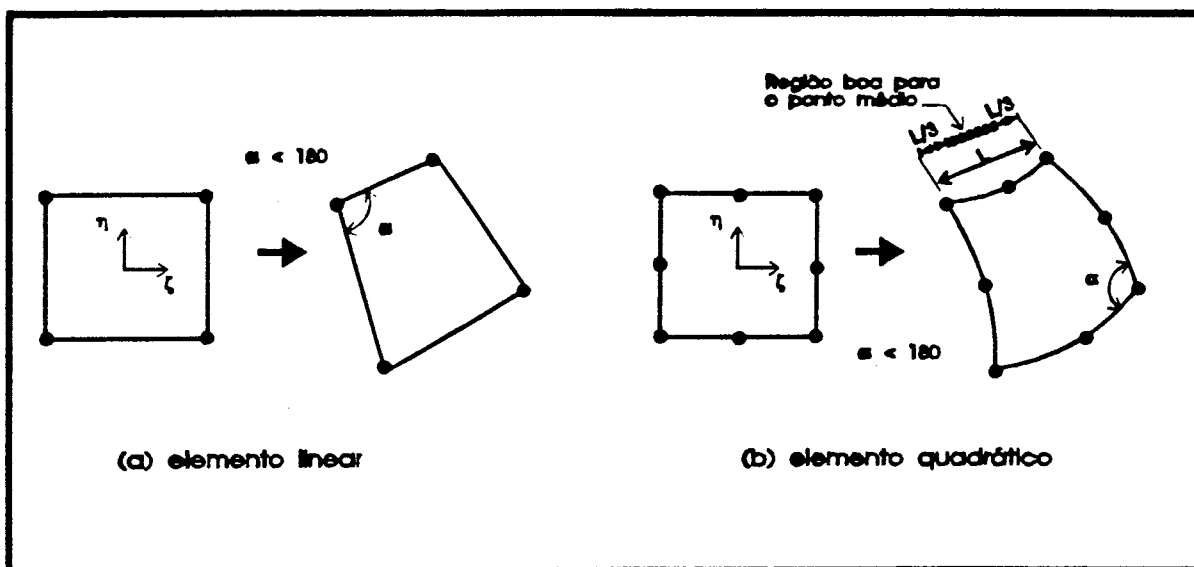


Fig. 1.12 - Regras para unicidade dos mapeamentos [ZIEN89]

A Fig. 1.13 mostra malhas que atendem a esta condição. Interseções que resultem em trechos de uma face ou aresta, como ilustra a Fig. 1.13 devem ser evitadas.

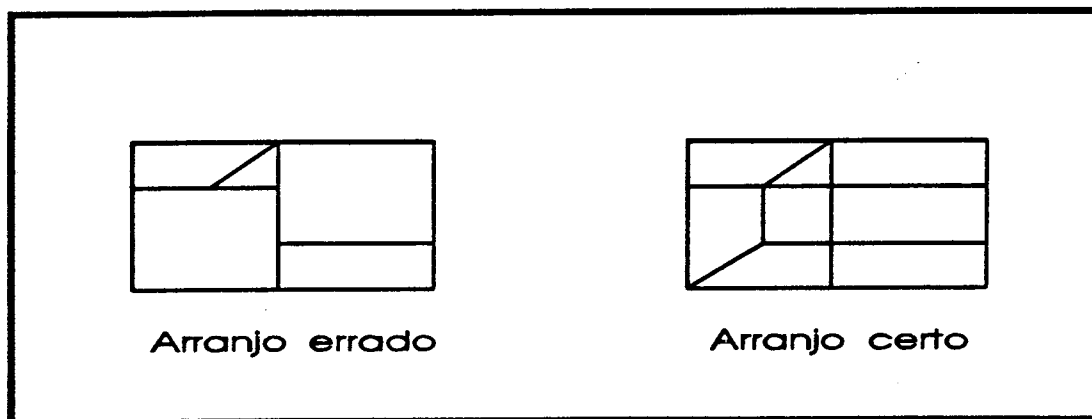


Fig. 1.13 - Condição básica para arranjos de elementos em malhas

Uma outra forma de enunciar esta propriedade seria a dizer que dois elementos de uma determinada dimensão só podem se interceptar em uma entidade de dimensão inferior. Quando o elemento for de dimensões diferentes (um cubo e um quadrado) a dimensão da interseção pode ser igual ao elemento de dimensão inferior.

As condições sobre a interseção de elementos de uma malha vão, entretanto, mais longe. No MEF a avaliação da integral sobre o domínio, Ω , é feita pela soma das integrais sob os domínios internos de cada elemento, Ω_e , sem considerações de suas fronteiras, ou seja:

$$\int_{\Omega} = \sum_{e=1}^{n. \text{ elementos}} \int_{\Omega_e} \quad (1.2)$$

Por isto é preciso garantir que a integral nas fronteiras dos elementos é nula. Esta condição impõe duas outras. A primeira é de que as fronteiras comuns a dois elementos devem se infinitesimais no espaço do domínio Ω . A segunda é de que os valores do campo incógnita e de suas derivadas que aparecem na integral devem ter valores limitados na fronteira. Se, por exemplo, a derivada de ordem máxima que aparece na integral apresentar um comportamento do tipo Delta de Dirac na fronteira, sua integral poderia ter valor finito violando a equação (1.2). Esta condição pode ser traduzida em termos de exigência de continuidade do campo nestas interfaces.

A ordem de continuidade na interface é função da ordem de derivada do campo que aparece na integral. Se a integral contém derivadas de ordem m , as funções precisam ser contínuas até a derivada $m-1$ para que a derivada m seja limitada. Assim, por exemplo, elementos tipo placa com derivadas de segunda ordem nos seus funcionais requerem continuidade C^1 para garantir convergência.

Uma maneira comumente utilizada para garantir continuidade ao longo de interfaces de dois elementos consiste em garantir que nela o campo incógnita seja função apenas dos valores dos nós comuns aos dois elementos. Isto implica que, por exemplo, o campo incógnita no lado dos elementos finitos triangulares mostrados na Fig. 1.14, seja função apenas dos valores v_2 e v_3 . Caso o campo no lado 23 fosse função dos valores v_1 ou v_4 , nada poderia garantir a continuidade deste campo uma vez que estes valores são independentes e podem variar livremente. Por isto, em formulações que não utilizam rotações a variação do campo incógnita nos lados de elementos triangulares de três nós é linear. Para se obter uma variação parabólica utiliza-se elementos triangulares com seis nós, um no meio de cada lado.

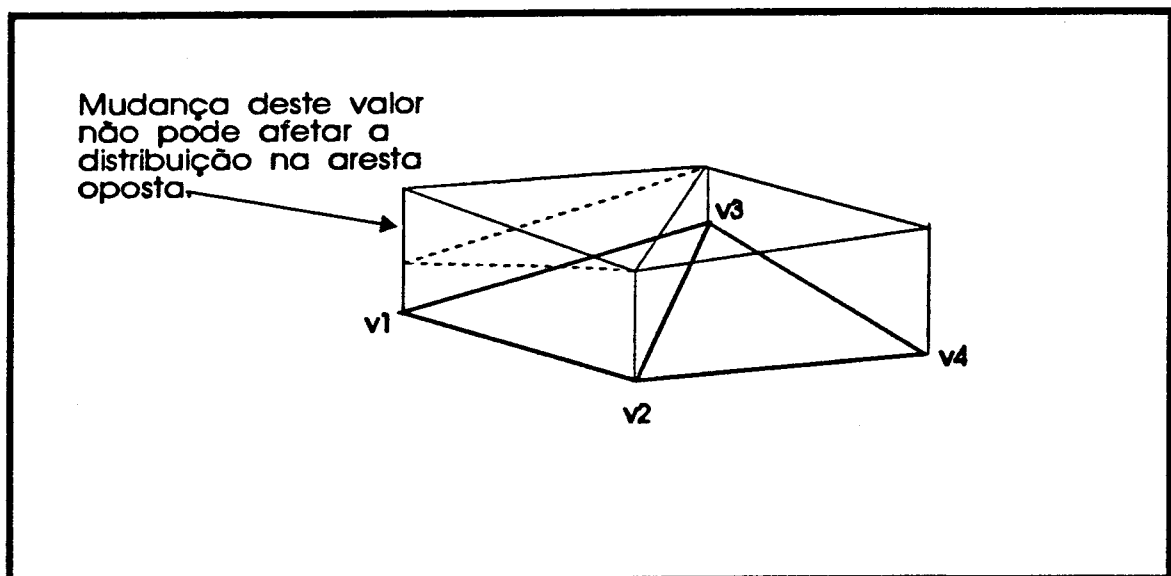


Fig. 1.14 - Dependência do campo incógnita nas interfaces

Algumas vezes analistas de elementos finitos utilizam malhas com inconsistências dos tipo de um elemento quadrilátero de oito nós colocado ao lado de outro de quatro, criando um lado comum com campo descontínuo como ilustra a Fig. 1.15. Neste caso espera-se que o programa de análise possa tratar estas inconsistências através de técnicas do tipo dos multiplicadores de Lagrange que procuram minimizar o erro cometido. Estas soluções são, entretanto, pouco elegantes e devem ser evitadas.

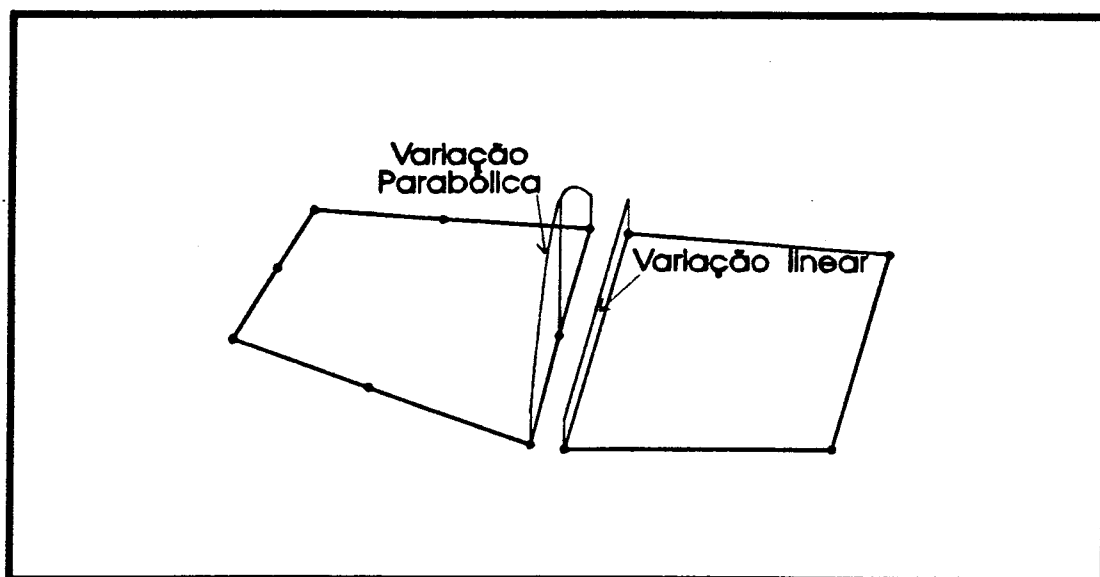


Fig. 1.15 - Incompatibilidades no campo de deslocamentos

1.3. O PROCESSO DE GERAÇÃO DE MALHAS

Quando, na década de 60, o método dos elementos finitos foi introduzido nos processos de projeto de engenharia, coube ao engenheiro analista a tarefa de descrever a malha diretamente para os programas então disponíveis. De uma maneira geral esta descrição é feita em quatro etapas. Na primeira etapa o analista fornece as coordenadas dos nós que são geralmente identificados pela ordem com que são fornecidos.

Na segunda etapa o analista fornece tabelas de material e outros atributos da malha. Na terceira etapa ele fornece uma descrição dos elementos através de sua incidência nodal (conectividade) e dos índices de material e outros atributos específicos do tipo de elemento. No último passo são fornecidas as excitações do modelo (cargas). Estas excitações são geralmente atribuídas diretamente a nós ou elementos. A geometria do domínio neste processo não é especificada diretamente e fica implícita na união dos elementos fornecidos.

Toda esta informação era passada para os programas de análise através de arquivos texto. Um dos primeiros sistemas de uso geral que surgiu na engenharia, o ICES (Integrated Civil Engineering System), foi desenvolvido no MIT (Massachusetts Institute of Technology) com preocupações de tornar estas etapas menos sujeitas a erros. A Fig. 1.16 mostra um trecho do arquivo texto que descreve a estrutura também mostrada na figura para um sub-sistema do ICES, o STRUDL.

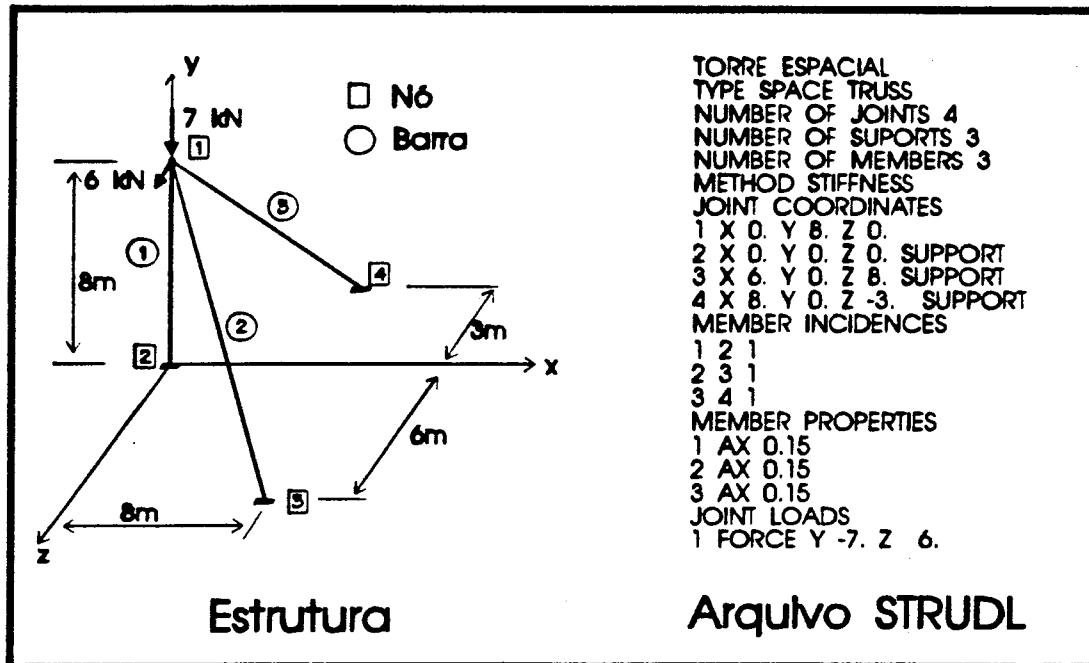


Fig. 1.16 - Estrutura e arquivo de dados para o ICES/STRUDL

A descrição do modelo para o sistema ICES/STRUDL, ilustrada nesta figura, é feita através de uma linguagem orientada pelo usuário. Este processo, apesar de ser obsoleto atualmente, era bastante adequado para a baixa interatividade dos computadores da época.

A preocupação com o desenvolvimento de novos elementos e de técnicas numéricas mais eficientes dominou a década subsequente. A descrição de um problema para os sistemas que surgiram neste período passaram a utilizar arquivos numéricos formatados onde o significado de cada número era função da ordem de sua linha no arquivo e de sua posição na linha. A Fig. 1.17 mostra trechos de um arquivo que descreve a estrutura da Fig. 1.17 para o programa SAP V (Structural Analysis Program). Este programa, que teve sua origem em Berkeley em 1965, teve seu fonte distribuído pelo mundo e influenciou de modo marcante o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos.

										10											20											30											40											50											60				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
TORRE ESPACIAL																																																																					
4	1	1	0	0	0	0	0	0	0																																																												
1	0	0	0	1	1	1	1	0.	8.	0.																																																											
2	1	1	1	1	1	1	1	0.	0.	0.																																																											
3	1	1	1	1	1	1	1	8.	0.	6.																																																											
4	1	1	1	1	1	1	1	8.	0.	-3.																																																											
1	3	1																																																																			
1210000000.																																																																					
1	2	1	1																																																																		
2	3	1	1																																																																		
3	4	1	1																																																																		
1	1	0.	-10.	5.																																																																	

Fig. 1.17 - Entrada de dados do programa SAP

Erros nesta descrição detalhada eram comuns até que, no final da década de 70, a Computação Gráfica passou a ser utilizada neste processo. Através dela, o usuário pode ver uma imagem da malha que sintetiza não só a geometria do domínio, mas também o arranjo dos elementos.

Técnicas da computação gráfica interativa foram usadas na década de 80 para promover um ambiente onde a criação da malha fosse feito dentro de um processo de diálogo orientado por computador. Estes programas que criavam dados para a análise, passaram a se chamar pré-processadores.

Os primeiros pré-processadores que surgiram procuravam reproduzir o processo de criação do arquivo de texto. Eles basicamente permitiam que a cada comando do usuário, feito ainda no modo semelhante aos do ICES/STRUDL, o usuário pudesse visualizar a malha gerada. As primeiras versões do programa ANSYS e do MTABS exemplificam este enfoque. A ênfase nestes programas estava na geração automática de nós e elementos a partir de comandos do tipo "repita um dado elemento n vezes em incrementos de tanto" ou "interpole n nós entre o nó tal e o nó tal". Uma forma primária destes comandos já existia nos arquivos texto e eram causas freqüentes de erros. O *feedback* visual possibilitado pelo uso da Computação Gráfica minimizou estes erros.

Uma nova geração de pré-processadores surgiu com a utilização de técnicas de geração automática de malhas a partir da fronteira de seu domínio. A Fig. 1.18 exemplifica esta idéia.

Uma evolução natural desta idéia vem ocorrendo com a introdução de ferramentas de Modelagem Geométrica para não só criar a geometria inicial do objeto como também para auxiliar no processo de geração automática da malha.

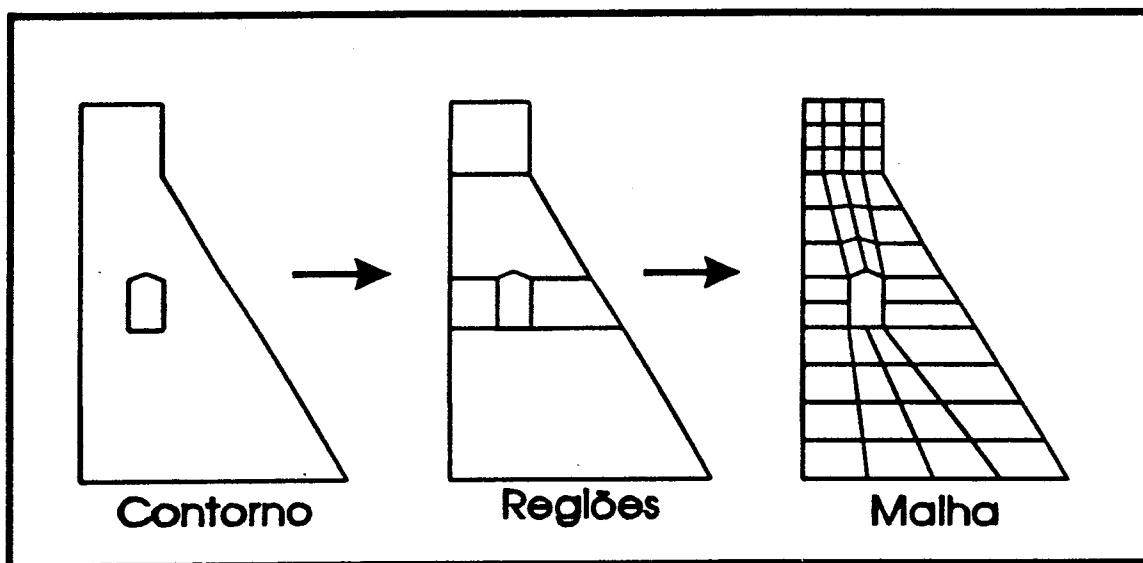


Fig. 1.18 - Geração de malha a partir da fronteira do domínio

1.4. CONVERGÊNCIA E ERRO DE DISCRETIZAÇÃO

Na modelagem por elementos finitos existem duas questões que devem ser abordadas: “Qual o grau de aproximação da solução encontrada?” e “Como a solução aproximada pode ser sistematicamente melhorada para chegar à solução exata?”.

A primeira pergunta é difícil de ser respondida pois ela pressupõe o conhecimento da solução exata. E o que é necessário para se responder a segunda pergunta é uma garantia de que o modelo vai convergir para a solução exata a medida que o tamanho h dos elementos vão diminuindo. Para tanto, argumenta-se [ZIEN89] que, se a aproximação para o campo incógnita for capaz de, no limite, reproduzir exatamente qualquer distribuição de deslocamentos dentro do meio contínuo e se a solução de cada aproximação for única, então o modelo vai convergir para a solução exata e única no limite $h \rightarrow 0$. Estes fatos são observados em modelos do MEF. Em alguns casos, a solução exata é encontrada mesmo com uma discretização finita (ou mesmo com um único elemento) se esta solução for formada pelas mesmas funções que são usadas na aproximação dentro de cada elemento. Assim, por exemplo, se a solução exata for da forma de um polinômio quadrático e a aproximação utilizada incluir todos os polinômios desta ordem, a aproximação resultará na solução correta.

A argumentação acima auxilia na determinação da ordem de convergência de um modelo de elementos finitos [ZIEN89]. Considere que a solução exata u pode ser expandida em uma série de Taylor na vizinhança de qualquer ponto (ou nó) i como um polinômio

$$u = u_i + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)(x - x_i) + \left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)(y - y_i) + \dots \quad (1.3)$$

Para isso não pode haver singularidade do campo na região da expansão. Se dentro de um elemento de tamanho característico h uma aproximação polinomial de grau p for empregada, então a solução aproximada ajusta localmente a expansão em Taylor da solução exata até este grau. Como x e y são da ordem de magnitude h , o erro em u vai ser da ordem $O(h^{p+1})$ porque somente os termos de ordem p podem ser representados corretamente. Uma ordem de erro $O(h^{p+1})$ corresponde a um grau de precisão n . O grau de precisão se refere ao grau do polinômio completo de mais alta ordem que pode ser representado exatamente.

Assim, por exemplo, se o polinômio utilizado na formulação do modelo de elementos finitos for linear ($p = 1$), a (velocidade de) convergência esperada é $O(h^2)$, isto é, o erro em deslocamentos é reduzido para 1/4 se o tamanho característico dos elementos da malha for reduzido pela metade. Analogamente, as deformações (ou tensões), que são obtidas por derivadas de grau m do campo de deslocamentos, devem convergir com um erro de ordem $O(h^{p+1-m})$. Para o caso de elasticidade plana ($m = 1$), no exemplo com aproximação linear a convergência para tensões é $O(h)$.

Tipos de refinamento de malha

Existem duas maneiras clássicas de reduzir o erro de aproximação de um modelo de elementos finitos. Estes procedimentos (Fig. 1.19), denominados de refinamento do tipo “ h ” e refinamento do tipo “ p ”, são duas formas de aumentar o número de graus de liberdade de um modelo, de forma a reduzir o erro de discretização em uma análise subsequente.

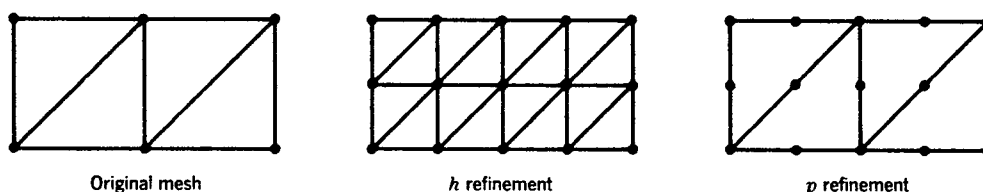


Fig. 1.19 – Refinamentos do tipo “ h ” e “ p ” [COOK89].

O refinamento do tipo “ h ”, Fig. 1.19-a, se refere a uma diminuição do tamanho característico (h) dos elementos, dividindo-se cada elemento em dois ou mais elementos, mas sem alterar o tipo de elemento usado. O refinamento do tipo “ p ”, Fig. 1.19-b, se refere a um aumento do grau (p) do polinômio completo de mais alto grau na formulação dos elementos, acrescentando-se nós aos elementos ou graus de liberdade (por ex., rotações) aos nós, ou ambos, mas sem alterar o número de elementos usados.

Uma terceira alternativa para refinar uma malha consiste na modificação da posição dos nós, movendo-os na direção das regiões onde haja gradientes acentuados na solução, mantendo-se o mesmo número de graus de liberdade do modelo e a ordem dos polinômios nos elementos. Este é o chamado refinamento do tipo “ r ” [CASA88, CYRI89]. Este procedimento aumenta a densidade da malha nas regiões mais críticas e torna o modelo menos refinado em outras áreas.

Uma seqüência sucessiva de refinamentos da malha produz uma convergência para o resultado correto. Este processo é conhecido como convergência- h , convergência- p ou convergência- r , dependendo do procedimento de refinamento adotado. O programa de análise por elementos finitos é chamado de ‘adaptativo’ se a adição de graus de liberdade, ou modificação da posição dos nós, e re-análise são executados com um mínimo de intervenção do analista. O programa é chamado de ‘auto-adaptativo’ se ele pode decidir automaticamente onde dentro da malha graus de liberdade adicionais são necessários, modificar esta malha, refazer a análise e continuar a executar este procedimento até que um critério de convergência pré-estipulado seja alcançado [COOK89].

As áreas de estivação de erros de discretização e análise auto-adaptativa são relativamente recentes na pesquisa sobre o MEF. Uma introdução a este assunto pode ser obtida no capítulo 14 da referência [ZIEN89]. A referência [SZAB91] aborda o assunto em maior profundidade.

REFERÊNCIAS

- [CASA88] Las Casas, E.B., “R-h Mesh Improvement Algorithms for the Finite Element Method”, Tese de doutoramento, Dept. Civil Engineering, Purdue University, 1988.
- [COOK89] Cook, R.D., Malkus, D.S. and Plesha, M.E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, Third Edition, John Wiley & Sons, 1989.
- [CLOU65] Clough, R.W., “The Finite Element Method in Structural Mechanics”, Chapter 7 of *Stress Analysis* (eds. O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister), Wiley, 1965.
- [CYRI89] Cyrino, J.C.R., “Convergência Acelerada pela Relocalização de Nós e Refinamento de Malhas de Elementos Finitos”, Tese de doutoramento, Programa de Eng. Civil, COOPE/UFRJ, 1989.
- [STRA73] Strang, G. and Fix, G., *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1973.
- [SZAB91] Szabó, B. and Babuska, I., *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, 1991.
- [WAWR87] Wawrzynek, P. A. and Ingraffea, A. R., “Interactive Finite Element Analysis of Fracture Processes: An Integrated Approach”, *Theor. Appl. Fract. Mech.*, Vol. 8, pp. 137-150, 1987.
- [ZIEN89] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The Finite Element Method – Volume 1 Basic Formulation and Linear Problems*, Fourth Edition, McGraw-Hill, 1989.

Introdução a Métodos Energéticos e Princípios Variacionais

• Introdução

— Quadros e treliças

matriz de rigidez dos elementos $[k]$ pode ser determinada por equilíbrio diretamente

— Elementos Finitos (E.F.) bi ou tridimensionais

$[K]$ não pode ser determinada por equilíbrio diretamente. Sai por princípios energéticos. Princípio dos Deslocamentos Virtuais (P.T.V.) ou métodos de energia

— P.D.V. nada mais é do que uma outra forma de estabelecer as condições de equilíbrio

— Método de Rayleigh-Ritz

método energético onde a função de aproximação abrange todo o domínio. Graus de liberdade não tem necessariamente significado físico.

— M.E.F.

função de aproximação é definida em pequenos pedaços. Graus de liberdade correspondem a valores das funções de aproximação nos nós

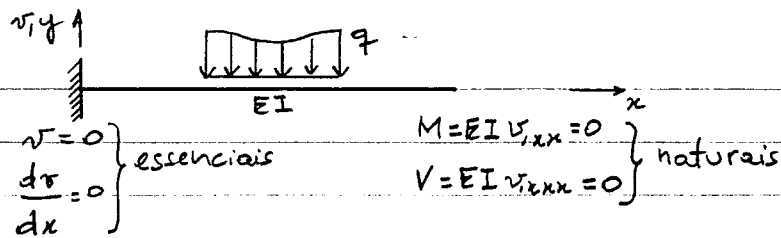
- Problema matemático a ser resolvido

- Equação diferencial governa o comportamento no domínio (ex. equações da elasticidade)

- Condições de contorno nas fronteiras

- cinemáticas (essenciais). Ex. deslocamentos prescritos

- estáticas (naturais). Ex. forças de superfície prescritas



- Formulações do problema

- Formulação forte ("strong form")

Formulação através das equações diferenciais diretamente. Condições de equilíbrio (e compatibilidade) tem que ser satisfeitas em todos os pontos.

- Formulação fraca ("weak form")

Formulação através de integrais que envolvem as equações diferenciais

• Princípio da Mínima Energia Potencial Total

- Sistema

estrutura e as forças que atuam

- Sistema conservativo

- Se o sistema for deslocado de qualquer configuração e retornado à posição original e o trabalho total realizado é nulo, independentemente da trajetória realizada.
- Se o sistema for deslocado de uma configuração para outra e o trabalho realizado pelas forças independe da trajetória.
- Energia de deformação e energia potencial dependem apenas da configuração atual e não de como o sistema chegou a ela (existe energia potencial)

- Configuração admissível

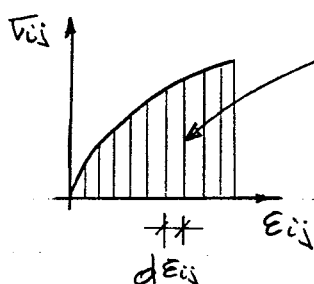
satisfaz compatibilidade de deslocamentos internamente e com os vínculos externos

- Energia de deformação interna

$$U = \int_V \left(\int_0^{\epsilon_{ij}} \tau_{ij} d\epsilon_{ij} \right) dV$$

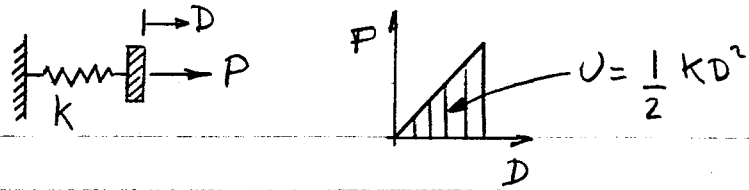
(notação indicial)

$$U_0 = \int_0^{\epsilon_{ij}} \tau_{ij} d\epsilon_{ij}$$



→ Energia de deformação por unidade de volume

— Sistema de 1 d.o.f. e U



— Meios contínuos e U

$$\underline{3D} \quad \{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{2D} \quad \{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} - [E] \{\epsilon_0\} + \{\sigma_0\}$$

↑ Lei de Hook
 ↑ deformações residuais
 ↑ tensões residuais

$$dU_0 = \{\sigma\}^T \{d\epsilon\}$$

$$dU_0 = \sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \tau_{xy} d\gamma_{xy}$$

↓
 Incremento de energia de deformação devido ao incremento de deformação

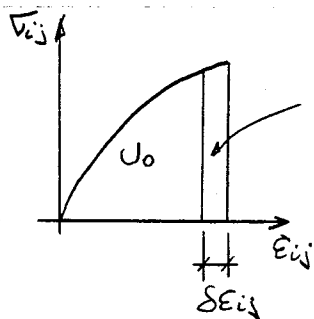
$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x} = \tau_x \quad ; \quad \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y} = \tau_y \quad ; \quad \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy}$$

Integrando dU_0 com respeito à deformação

$$\Rightarrow U_0 = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon\}^T \{\tau_0\}$$

$$U = \int_V U_0 dV$$

— 1ª variação de U em relação a deslocamentos δu



$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})$$

$$\delta U_0 = \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij}$$

$$\delta U = \int_V \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$$

1ª variação de U , δU , corresponde ao trabalho virtual interno para uma estrutura submetida a um campo de deslocamentos virtuais δu

— Trabalho virtual das forças externas

$$\delta W_E = \int_S \phi_i \delta u_i ds + \int_V F_i \delta u_i dV$$

(notação indicial)

$\phi_i \rightarrow$ forças de superfície

$F_i \rightarrow$ forças de volume

- Potencial das forças externas

É definida uma função potencial das forças externas V_E , tal que a sua primeira variação δV_E , seja igual a $-\delta W_E$ (igual a menos o trabalho virtual das forças externas)

$$\delta V_E = -\delta W_E$$

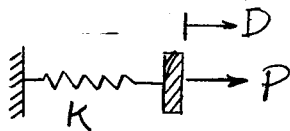
Assim,

$$V_E = -\int_S \phi_i u_i ds - \int_V F_i u_i dV + \text{const}$$

↑
depende do referencial escolhido

Na expressão acima não aparece o termo $\frac{1}{2}$. Isto porque o potencial das forças externas representa um potencial adquirido pelo carregamento, com sua intensidade total, de deslocar dentro de todas as suas possibilidades, nada tendo a ver com as características elástica da estrutura. Estas estão representados em U .

- Sistema de 1 d.o.f. e V_E



$$V_E = -PD + \text{const}$$

— Meios contínuos e V_E

$$\underline{3D} \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} ; \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} ; \quad \{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{Bmatrix}$$

deslocamentos forças de volume forças de superfície

$$\underline{2D} \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} ; \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} ; \quad \{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}$$

Forças e momentos concentrados: $\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix}$

$$V_E = - \int_V \{u\}^T \{F\} dV - \int_S \{u\}^T \{\phi\} dS - \{D\}^T \{P\}$$

— Energia Potencial Total

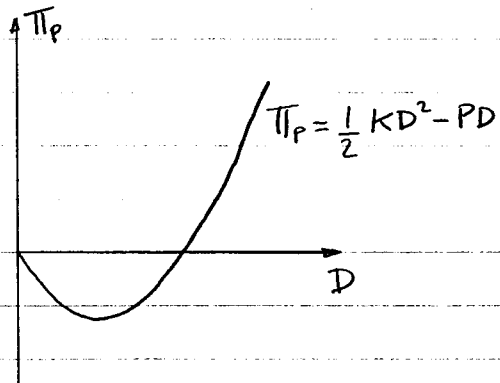
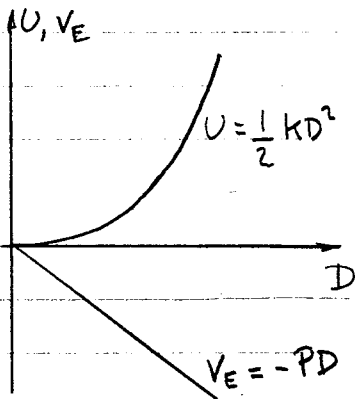
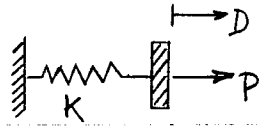
$$\Pi_P = U + V_E$$

$$\Pi_P = \int_V \left(\int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \right) dV - \int_S \phi_i u_i dS - \int_V F_i u_i dV$$

Pode ser encarada como a energia a ser fornecida ao sistema para levá-lo de uma configuração qualquer de deslocamentos e forças aplicadas (diferente ou não da configuração de equilíbrio) para a configuração do sistema indeformado.

Se a configuração indeformada for o referencial de energia, então $const = 0$.

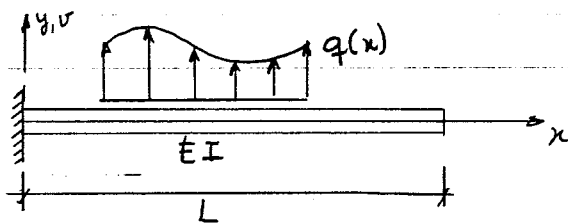
— Sistema de 1 d.o.f. e Π_P



— Meios contínuos e Π_P

$$\Pi_P = \int_V U_0 dV - \int_V \{u\}^T \{F\} dV - \int_S \{u\}^T \{\phi\} dS - \{D\}^T \{P\}$$

Ex.: Viga com carga transversal



$$dU_0 = \epsilon_x dE_x$$

(só considerando deformação por flexão)

$$dU_0 = E \epsilon_x d\epsilon_x$$

$$U_0 = \int_0^{\epsilon_x} dU_0 \quad \rightarrow \quad U_0 = \frac{E}{2} \epsilon_x^2$$

onde, $\epsilon_x = \epsilon_f = -y \frac{d^2 v}{dx^2}$

$$\Rightarrow U = \int_V U_0 = \int_0^L \int_A \frac{E}{2} \left(-y \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dA dx$$

$$U = \int_0^L \frac{E}{2} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 \int_A (-y)^2 dA dx$$

$$U = \int_0^L \frac{EI}{2} v_{,xx}^2 dx$$

Energia de deformação interna

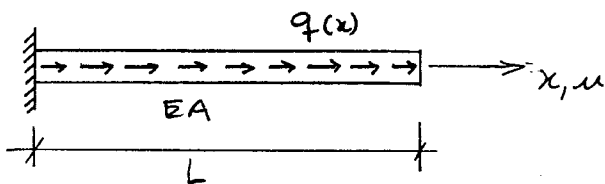
$$V_E = - \int_0^L q(x) v(x) dx$$

Potencial das forças externas

$$\Pi_P = \int_0^L \frac{EI}{2} v_{,xx}^2 dx - \int_0^L q(x) v(x) dx$$

Energia Potencial Total

Ex.: Barra com carga axial



$$dU_0 = \nabla_x d\epsilon_x = E \epsilon_x d\epsilon_x$$

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx}$$

$$U = \int_V U_0 = \int_0^L \int_A \frac{E}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dA dx$$

$$U = \int_0^L \frac{EA}{2} u_{,x}^2 dx$$

Energia de deformação interna

$$V_E = - \int_0^L q(x) u(x) dx$$

Potencial das forças externas

$$\Pi_P = \int_0^L \frac{EA}{2} u_{,x}^2 dx - \int_0^L q(x) u(x) dx$$

Energia Potencial Total

— 1ª variação da energia potencial total

Se para um sistema (estrutura e forças) em equilíbrio for dado um campo de deslocamentos δu :

$$\delta \Pi_{P_{eq.}} = \delta U_{eq.} + \delta V_{E_{eq.}}$$

Observe que pela expressão do Princípio dos Deslocamentos Virtuais tem-se:

$$\delta U_{eq.} = \delta W_{E_{eq.}}$$

E como $\delta W_E = -\delta V_E$, tem-se: $\delta \Pi_{P_{eq.}} = 0$.

- Princípio da Mínima Energia Potencial Total

$\delta \Pi_{peq} = 0$ mostra que pequenas variações de deslocamentos em torno da configuração de equilíbrio não alteram o valor de Π_{peq} .

Isto é, a energia potencial total é estacionária (passa por um mínimo ou máximo) quando a estrutura está na configuração de equilíbrio.

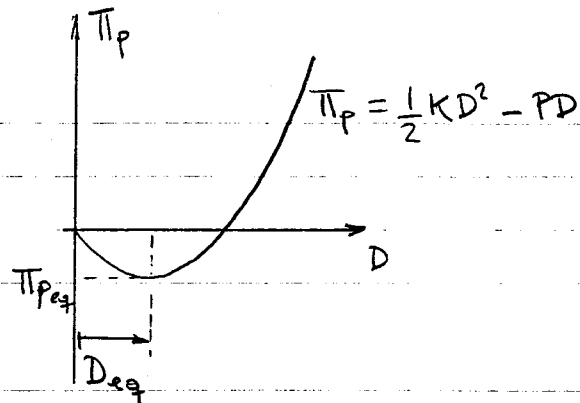
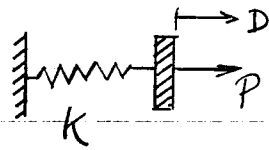
Ou por outra, a imposição de $\delta \Pi_p = 0$ é uma condição de equilíbrio para a estrutura, do mesmo modo que é a aplicação do princípio dos deslocamentos virtuais.

"Dentre todas as configurações admissíveis de um sistema conservativo, aquelas que satisfazem as condições de equilíbrio fazem com que a energia potencial total seja estacionária com respeito a pequenas variações de deslocamentos. Se a condição de estacionariedade é de mínimo, então o equilíbrio é estável."

O princípio é válido mesmo no caso em que o material não tem um comportamento linear (o sistema tem que ser conservativo).

Os carregamentos são mantidos constantes durante a variação de deslocamento.

— Sistema de 1 d.o.f. e $\delta \Pi_p = 0$



$$\Pi_p = \Pi_p(D)$$

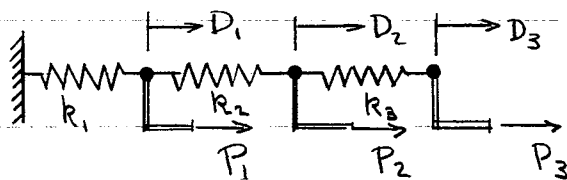
$$\delta \Pi_p = \frac{\partial \Pi_p}{\partial D} \delta D$$

$$\delta \Pi_p = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \Pi_p}{\partial D} = 0}$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial D} = kD - P = 0 \rightarrow \text{Equação de equilíbrio}$$

$$D_{eq} = P/k$$

— Sistema de vários d.o.f. e $\delta \Pi_p = 0$



$$\{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_m \end{Bmatrix}$$

$$\Pi_p = \Pi_p(D_1, D_2, \dots, D_m)$$

$$\delta \Pi_p = \frac{\partial \Pi_p}{\partial D_1} \delta D_1 + \frac{\partial \Pi_p}{\partial D_2} \delta D_2 + \dots + \frac{\partial \Pi_p}{\partial D_m} \delta D_m$$

$$\delta \Pi_p = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \Pi}{\partial D_i} = 0}$$

Equações de equilíbrio na direção do d.o.f. i .

Ex.: molas em série

$$\Pi_P = \frac{1}{2} k_1 D_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (D_2 - D_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (D_3 - D_2)^2 - P_1 D_1 - P_2 D_2 - P_3 D_3$$

$$\frac{\partial \Pi_P}{\partial D_i} = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_1 D_1 - k_2 (D_2 - D_1) - P_1 = 0 \\ k_2 (D_2 - D_1) - k_3 (D_3 - D_2) - P_2 = 0 \\ k_3 (D_3 - D_2) - P_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{[K] \{D\} = \{R\}}$$

sistema de equilíbrio do método da rigidez direta

Conclusões:

1. 1º Teorema de Castigliano

$$\frac{\partial^2 U}{\partial D_i \partial D_j} = K_{ij}$$

$$\frac{\partial U}{\partial D_j \partial D_i} = K_{ji}$$

2. Sistema conservativo $\Rightarrow K_{ij} = K_{ji}$

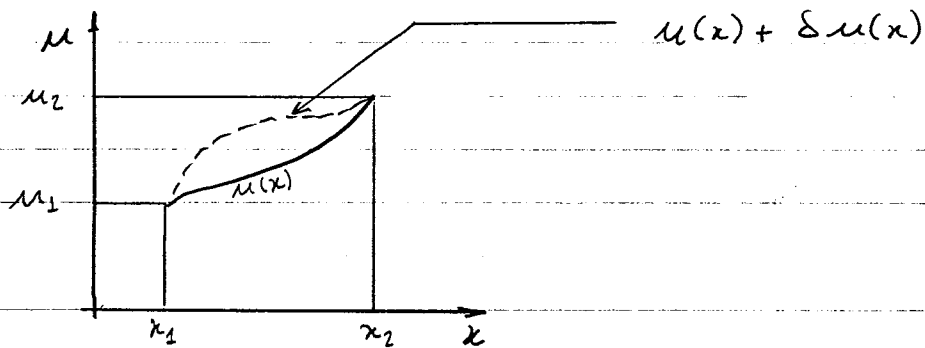
- Generalizações do Enfoque Integral (Energético)

- Caso unidimensional

Funcional $\rightarrow \Pi = \int_{x_1}^{x_2} F(x, u, u_{,x}) dx$

$u = u(x) \rightarrow$ função que minimiza ou maximiza Π

$\delta u(x) \rightarrow$ variações em $u(x)$



$\delta^2 \Pi = 0$ \rightarrow condição de mínimo ou máximo de Π

"variação" no sentido de cálculo variacional

"variação" em torno da solução que minimiza ou maximiza o funcional

$\delta^2 \Pi > 0 \rightarrow$ condição de mínimo

$\delta^2 \Pi < 0 \rightarrow$ condição de máximo

$\delta^2 \Pi = 0 \rightarrow$ deve-se pesquisar variações de maior ordem

— Revisão de cálculo variacional

$$u(x) = u(x) + \delta u(x) \quad \text{ou} \quad u(x) = u(x) + \alpha \eta(x)$$

$$\Rightarrow \Pi = \Pi(\alpha)$$

$$\boxed{\delta \Pi = 0} \quad \equiv \quad \boxed{\left. \frac{d\Pi}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0}$$

integração por partes

$$\left. \frac{d\Pi}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \equiv \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \right] \eta(x) dx + \left[\frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$\delta \Pi = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} = 0}$$

→ Equação de Euler

Equação diferencial associada a um problema de minimização (ou maximização) de um funcional.

Condições de contorno: naturais

ou

essenciais

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\left. \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \right|_{x=x_1} = 0}$$

ou

$$\boxed{\left. \delta u(x) \right|_{x=x_1} = 0}$$

$$\boxed{\left. \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \right|_{x=x_2} = 0}$$

ou

$$\boxed{\left. \delta u(x) \right|_{x=x_2} = 0}$$

(quando $u(x_1)$ ou $u(x_2)$ são desconhecidos)

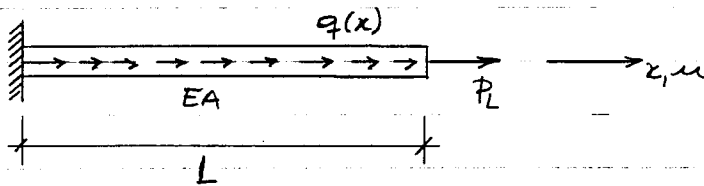
(quando $u(x_1)$ ou $u(x_2)$ são conhecidos)

Formulações do problema :

Formulação Forte ("strong form") \rightarrow Eq. de Euler +
Cond. de contorno

Formulação Fraca ("weak form") \rightarrow $\delta \Pi = 0$

— Ex.: Barra com carga axial



$$\Pi = U + V_E = \int_0^L \left(\frac{EA}{2} u_{,x}^2 - q(x)u(x) \right) dx - P_L u_L$$

$$F = \frac{EA}{2} u_{,x}^2 - q(x)u(x)$$

$$\delta \Pi = \delta \int_0^L F(x, u, u_{,x}) dx - \delta u_L P_L$$

$$\delta \Pi = 0 \Rightarrow \text{Eq. de Euler: } \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -q(x) \quad ; \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} = \frac{d}{dx} (EA u_{,x}) = EA \frac{d^2 u}{dx^2}$$

$$\therefore \boxed{EA \frac{d^2 u}{dx^2} + q(x) = 0 \quad 0 < x < L}$$

equação diferencial que governa o comportamento axial de uma barra (eq. de equilíbrio em termos de u)

Condições de contorno :

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \delta u(x) \right]_{x=0}^{x=L} - \delta u(x=L) \cdot P_L = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_{,x}} = EA \frac{du}{dx}$$

x=0

$$EA \frac{du}{dx} \cdot \delta u(0) = 0$$

$$\boxed{u(0) = 0} \Rightarrow \delta u(0) = 0$$

x=L

$$\left(EA \frac{du}{dx} - P_L \right) \delta u(L) = 0$$

$u(L)$ é desconhecido

$$\Rightarrow \boxed{EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = P_L} \quad \begin{array}{l} \text{Esforço normal} \\ \text{em } x=L \end{array}$$

— Caso bidimensional

$$\Pi = \iint F(x, y, u, v, u_{,x}, u_{,y}, v_{,x}, v_{,y}, \dots, v_{,yy}) dx dy$$

Hipótese: derivada de maior ordem é do segundo grau

$$\begin{array}{l} \text{variáveis fundamentais: } u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{array}$$

$\delta \Pi = 0 \Rightarrow$ condição de máximo ou mínimo do funcional

"variação" (no sentido de cálculo variacional) em torno das soluções u e v que minimizam ou maximizam Π

Equações de Euler :

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial u_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial u_{yy}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial v_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial v_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial v_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial v_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial v_{yy}} = 0$$

Existem tantas equações de Euler quantas são as variáveis fundamentais.

• Método de Rayleigh - Ritz

- Formulação integral :

Ao invés de atacar o problema pela formulação forte ("strong") — equações diferenciais mais condições de contorno — tenta-se minimizar um funcional.

- Método : (3D)

As funções de deslocamento u, v, w são aproximadas por

$$u = \sum_{i=1}^l a_i f_i \quad ; \quad v = \sum_{i=l+1}^m a_i f_i \quad ; \quad w = \sum_{i=m+1}^n a_i f_i$$

Funções de aproximação $f_i = f_i(x, y, z)$

Funções conhecidas admissíveis (que satisfazem as condições de contorno essenciais e compatibilidade de deslocamentos).

Formam uma "base" (de um subespaço) de funções que servem para descrever os deslocamentos.

Coordenadas generalizadas a_i

Uma vez conhecidas as amplitudes a_i o problema fica resolvido.

No método de Rayleigh-Ritz as amplitudes a_i não tem o menor sentido físico e são de número finito.

Mas quais são os valores de a_i que melhor aproximam u, v, w ?

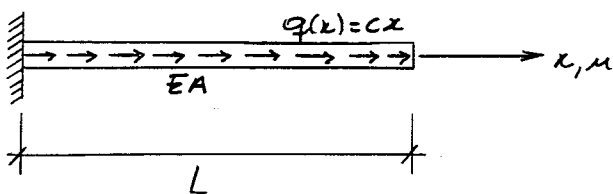
- Formulação fraca (integral)

O problema é atacado na forma fraca ("weak") e escreve-se. $\Pi_p = \Pi_p(a_i)$

$$\partial \Pi_p = 0 \implies \frac{\partial \Pi_p}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

← sistema de $n \times n$ equações

- Exemplo unidimensional



$f_i = f_i(x) \rightarrow$ funções polinomiais

$$\implies u = \sum_{i=1}^m a_i f_i = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_m x^m$$

$a_0 = 0$ pois $u = a_0$ é inadmissível

$$\underline{n=1} \quad \rightarrow \quad u(x) = a_1 x$$

$$\Pi_p = \frac{EA L a_1^2}{2} - \frac{c L^3}{3} a_1$$

$$\frac{d\Pi_p}{da_1} = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{c L^2}{3EA} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{c L^2}{3EA} x \\ \overline{V}_x = E \frac{du}{dx} = \frac{c L^2}{3A} \end{cases}$$

$$\underline{n=2} \quad \rightarrow \quad u(x) = a_1 x + a_2 x^2$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial a_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Pi_p}{\partial a_2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$EAL \begin{bmatrix} 1 & L \\ L & 4L^2/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{cL^2}{12} \begin{Bmatrix} 4 \\ 3L \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{cL}{12EA} \begin{Bmatrix} 7L \\ -3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{cL}{12EA} (7Lx - 3x^2) \\ \overline{V}_x = \frac{cL}{12A} (7L - 6x) \end{cases}$$

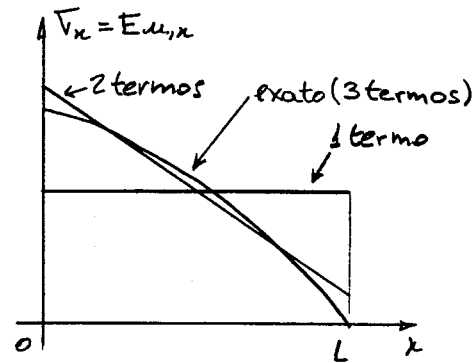
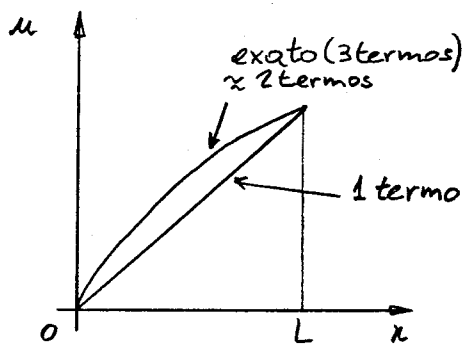
$$\underline{n=3} \quad \rightarrow \quad u(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\delta \Pi_p = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{cL^2}{2EA} \quad ; \quad a_2 = 0 \quad ; \quad a_3 = -\frac{c}{6AE}$$

$$e \quad \boxed{u(x) = \frac{c}{6EA} (3L^2 x - x^3)} \quad \text{solução exata: satisfaz} \quad \begin{cases} u(0) = 0 \\ \overline{V}_x(L) = E \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = c \end{cases}$$

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + cx = 0$$

$$\underline{n=4, 5, \dots, \infty} \Rightarrow a_2 = a_4 = a_5 = \dots = 0$$



Comentários

- As funções de aproximação têm que ser admissíveis (satisfazer condições de contorno essenciais e compatibilidade) e fáceis de usar (polinômios e senos e cossenos).
- As seguintes perguntas têm que ser respondidas:
Quais os termos e quantos termos considerar?
Qual o grau de aproximação adequado?
- Condição de convergência:
A base das funções de aproximação tem que ser completa.
Uma base é completa quando:
 - Os deslocamentos e suas derivadas que aparecem em Π_p podem ser aproximados quando um suficiente número de termos é utilizado.
Ex.: polinômios com todos os termos; série de Fourier
 - Elementos da base de ordem mais baixa e que são admissíveis devem estar contidos.
Ex.: Convergência não seria alcançada no exemplo anterior se o termo $a_1 x$ não tivesse sido considerado.

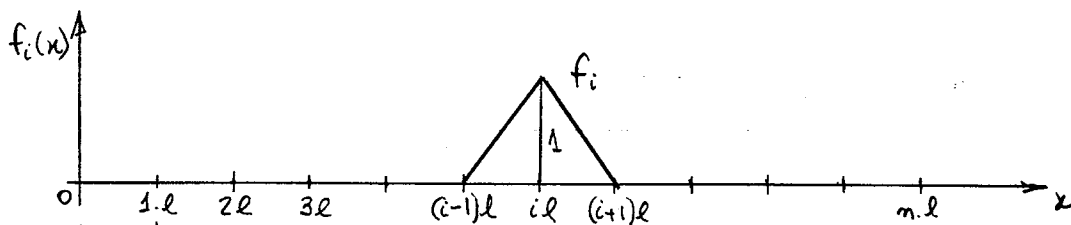
- A solução aproximada pelo método de Rayleigh-Ritz ou é exata ou é mais rígida do que a exata. Os deslocamentos no geral são menores. A solução aproximada corresponde a restrições impostas à resposta exata. O modelo estrutural é mais rígido do que a estrutura real. Isto não quer dizer que todos os graus de liberdade são subestimados. (Isto é certamente verdadeiro se só existir um d.o.f.)
- Quando forças são prescritas, a energia de deformação interna U é subestimada pelo método de Rayleigh-Ritz. Isto porque $U = W$, sendo W o trabalho das forças externas, e W é subestimado pois os deslocamentos são menores.
Quando deslocamentos são prescritos, U é superestimado (é necessário mais força para deformar).
Quando os dois são prescritos, U pode ser sub ou superestimado.
- Derivadas das funções fundamentais (deformação ou tensão, por exemplo) têm um grau menor de precisão. Tensão é em geral subestimada, mas não em todos os pontos.
- Se a base de funções de aproximação contém a solução exata do problema, então a solução exata é encontrada. Neste caso, o equilíbrio verdadeiro da estrutura foi encontrado, e o valor de T_{ip} corresponde ao mínimo absoluto. Uma solução aproximada do método de Rayleigh-Ritz fornece sempre um valor para T_{ip} que é maior do que o valor correto. Desta forma um valor de T_{ip} encontrado é sempre um limite superior para a verdadeira energia potencial total.

• Formulação em Elementos Finitos do Método de Rayleigh-Ritz

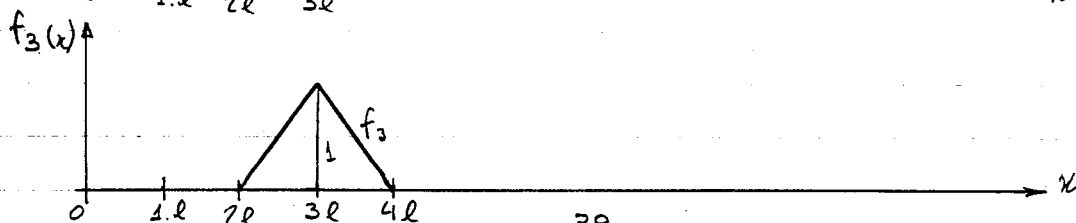
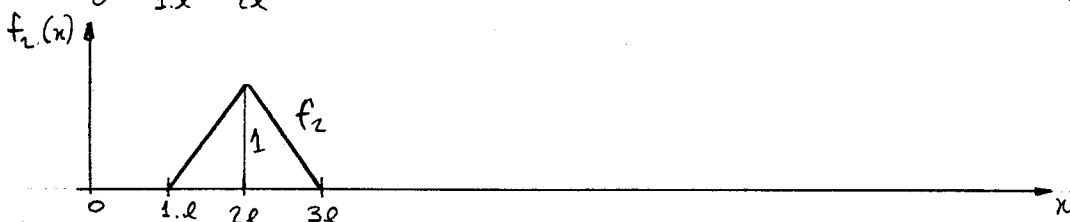
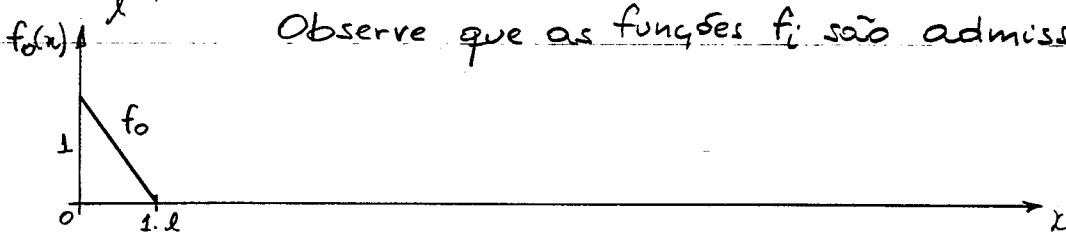
O método dos elementos finitos pode ser definido como o método de Rayleigh-Ritz no qual a base de funções de aproximação é formada por funções de interpolação definidas em pequenos intervalos e que interpolam valores nodais.

Em outras palavras, as funções de aproximação não cobrem todo o domínio (cobrem apenas uma pequena região) e as coordenadas generalizadas confundem-se com os valores nodais.

— Caso unidimensional e funções de interpolação lineares



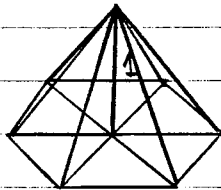
Observe que as funções f_i são admissíveis



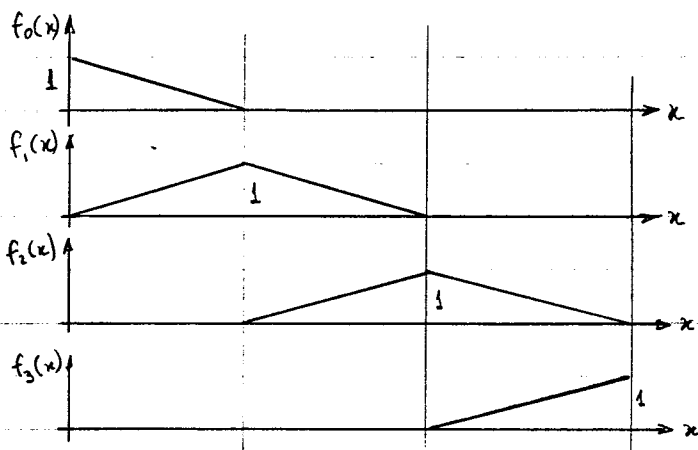
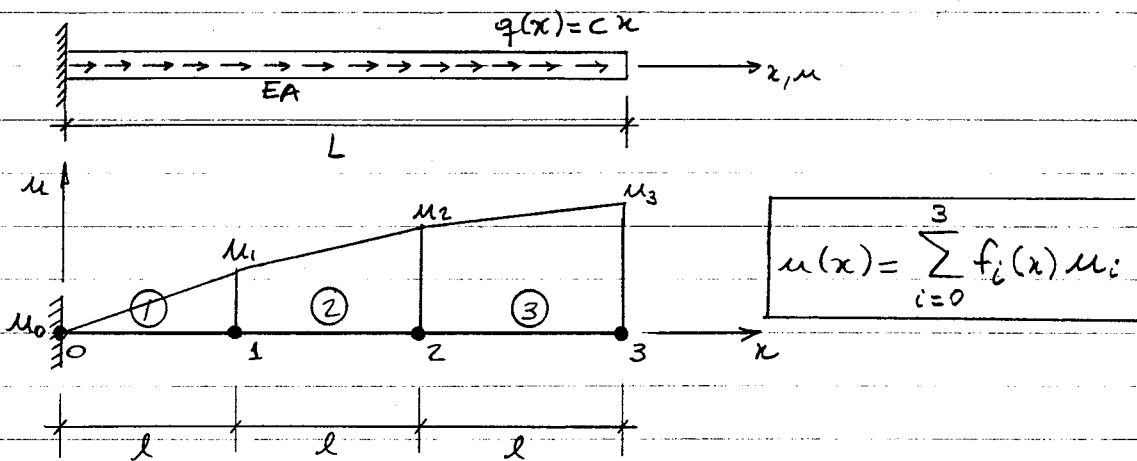
As funções f_i são "quase" ortogonais:

$$\int_0^L f_i f_j dx = \begin{cases} \neq 0 & \begin{array}{l} j=i-1 \\ j=i \\ j=i+1 \end{array} \\ 0 & j = \text{restante} \end{cases}$$

— Caso bidimensional



— Exemplo unidimensional



No exemplo, qualquer campo de deslocamentos formado por uma interpolação linear de valores nodais pode ser escrito em função da base escolhida: $u(x) = \sum_{i=0}^3 f_i(x) u_i$.

Energia Potencial Total

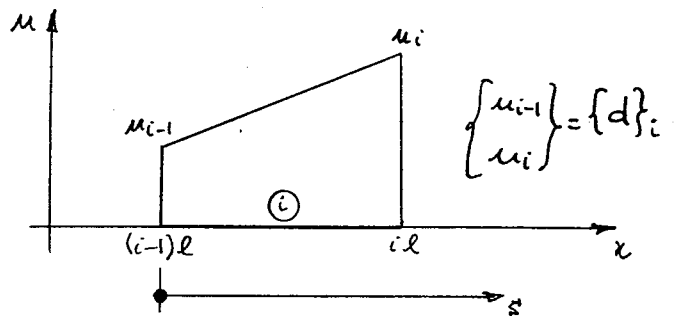
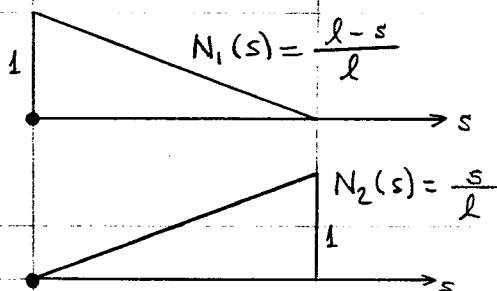
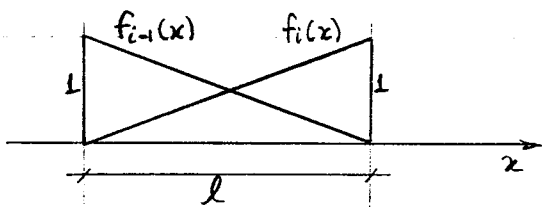
$$\Pi_p = \int_0^L \frac{EA}{2} u_{,x}^2 dx - \int_0^L u q(x) dx$$

Observe que o cálculo de Π_p pode ser escrito como:

$$\Pi_p = \sum_{i=1}^3 \Pi_{p_i}, \text{ onde}$$

$$\Pi_{p_i} = \int_{(i-1)l}^{il} \frac{EA}{2} (u_{i-1} f'_{i-1} + u_i f'_i)^2 dx - \int_{(i-1)l}^{il} (u_{i-1} f_{i-1} + u_i f_i) q(x) dx$$

No elemento \textcircled{i} :



$$u(s) = u_{i-1} N_1(s) + u_i N_2(s)$$

$$u(s) = [N] \{d\}_i$$

$$[N] = [N_1 \quad N_2]$$

(matriz das funções de forma)

Mudança de variável: $x \rightarrow s$
 $s = x - (i-1)l$; $ds = dx$

$$\Pi_{P_i} = \int_0^l \frac{EA}{2} (u_{i-1} N_1'(s) + u_i N_2'(s))^2 ds - \int_0^l (u_{i-1} N_1(s) + u_i N_2(s)) q(s) ds$$

onde,

$$u_{i-1} N_1'(s) + u_i N_2'(s) = u'(s) = \epsilon_s = \epsilon_x$$

$$\epsilon_x = \frac{d}{ds} [N] \{d\}_i = [B] \{d\}_i$$

$[B] = [N_1' \quad N_2'] \rightarrow$ matriz deformação \leftrightarrow deslocamento nodal

$$U_i = \int_0^l \frac{EA}{2} (u_{i-1} N_1'(s) + u_i N_2'(s))^2 ds = \int_0^l \frac{EA}{2} (u_{i-1}^2 N_1'^2 + 2u_{i-1}u_i N_1'N_2' + u_i^2 N_2'^2) ds$$

$$U_i = \frac{1}{2} \{u_{i-1} \quad u_i\} \int_0^l EA \begin{bmatrix} N_1'^2 & N_1'N_2' \\ N_2'N_1' & N_2'^2 \end{bmatrix} ds \begin{Bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \{d\}_i^T [K]_i \{d\}_i$$

onde, $[K]_i = \int_0^l [B]^T EA [B] ds \rightarrow$ matriz de rigidez do elemento

$$\left. \begin{array}{l} N_1'(s) = -\frac{1}{l} \\ N_2'(s) = \frac{1}{l} \end{array} \right\} \Rightarrow [K]_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$V_{Ei} = - \int_0^l (u_{i-1} N_1 + u_i N_2) q(s) ds = - \{u_{i-1} \quad u_i\} \int_0^l \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} q(s) ds$$

$$V_{Ei} = - \{d\}_i^T \{r_E\}_i ; \quad \begin{Bmatrix} r_{E1} \\ r_{E2} \end{Bmatrix}_i = \int_0^l \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} q(s) ds$$

onde,

$\{r_E\}_i \rightarrow$ forças equivalentes nodais

São chamadas de consistentes porque são calculadas baseadas nas mesmas funções de forma que são utilizadas no cálculo da matriz de rigidez do elemento. Trabalho produzido por $\{r_E\}$ para deslocamentos $\{d\}$ é igual ao trabalho produzido por $q(x)$ para um campo de deslocamentos associado com as funções de forma do elemento.

Finalmente,

$$\Pi_{Pi} = U_i + V_{Ei} ; \quad \boxed{\Pi_{Pi} = \frac{1}{2} \{d\}_i^T [K]_i \{d\}_i - \{d\}_i^T \{r_E\}_i}$$

No exemplo estudado, $q(x) = cx \Rightarrow$

$$\{r_E\}_1 = \frac{cl^2}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} ; \quad \{r_E\}_2 = \frac{cl^2}{6} \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \end{Bmatrix} ; \quad \{r_E\}_3 = \frac{cl^2}{6} \begin{Bmatrix} 7 \\ 8 \end{Bmatrix}$$

Equações globais

$$\Pi_P = \sum_{i=1}^3 \Pi_{Pi}$$

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \{D\}^T \left(\begin{bmatrix} EA/l & -EA/l & 0 & 0 \\ -EA/l & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EA/l & -EA/l & 0 \\ 0 & -EA/l & EA/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EA/l & -EA/l \\ 0 & 0 & -EA/l & EA/l \end{bmatrix} \right) \{D\}$$

$$- \{D\}^T \left(\frac{cl^2}{6} \left(\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

ou,

$$\boxed{\Pi_p = \frac{1}{2} \{D\}^T [K] \{D\} - \{D\}^T \{R\}}$$

$$\Delta \Pi_p = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi_p}{\partial \{D\}} = \{0\} \quad \text{ou} \quad \boxed{[K] \{D\} = \{R\}}$$

onde, $[K] \rightarrow$ matriz de rigidez global

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{cl^2}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ 12 \\ 8 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resta introduzir as condições de contorno, o que é feito da mesma forma do que é feito no método da rigidez direta.

De uma forma geral,

$$\Pi_p = \sum_{i=1}^{nelem} \Pi_{p_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nelem} \{d\}_i^T [K]_i \{d\}_i - \sum_{i=1}^{nelem} \{d\}_i^T \{r\}_i - \{D\}^T \{P\}$$

É importante observar que o somatório na expressão acima pressupõe que as funções de forma utilizadas são tais que forcem uma compatibilidade de deslocamento entre os diversos elementos.

E finalmente,

$$\delta \Pi_p = 0 \Rightarrow [K] \{D\} = \{R\}$$

Onde, $[K] = \sum_{i=1}^{nelem} [K]_i$

$$\{R\} = \sum_{i=1}^{nelem} \{r\}_i + \{P\}$$

O somatório $\sum_{i=1}^{nelem}$ assume uma extensão das entidades locais para o tamanho das entidades da estrutura global.

— Comentários Gerais

A matriz de rigidez do elemento finito poderia ter sido obtida considerando-se o equilíbrio do elemento isoladamente. O princípio dos deslocamentos virtuais pode ser aplicado para encontrar as forças que aparecem nas coordenadas generalizadas do elemento quando este está submetido a configurações cinemáticas conhecidas (deslocamento de um grau de liberdade com valor unitário e os demais nulos). Até mesmo o princípio da mínima energia potencial total poderia ser aplicado, a nível de um elemento, para determinar a sua matriz de rigidez. A montagem da matriz de rigidez global seguiria, então, o procedimento do método da rigidez direta.

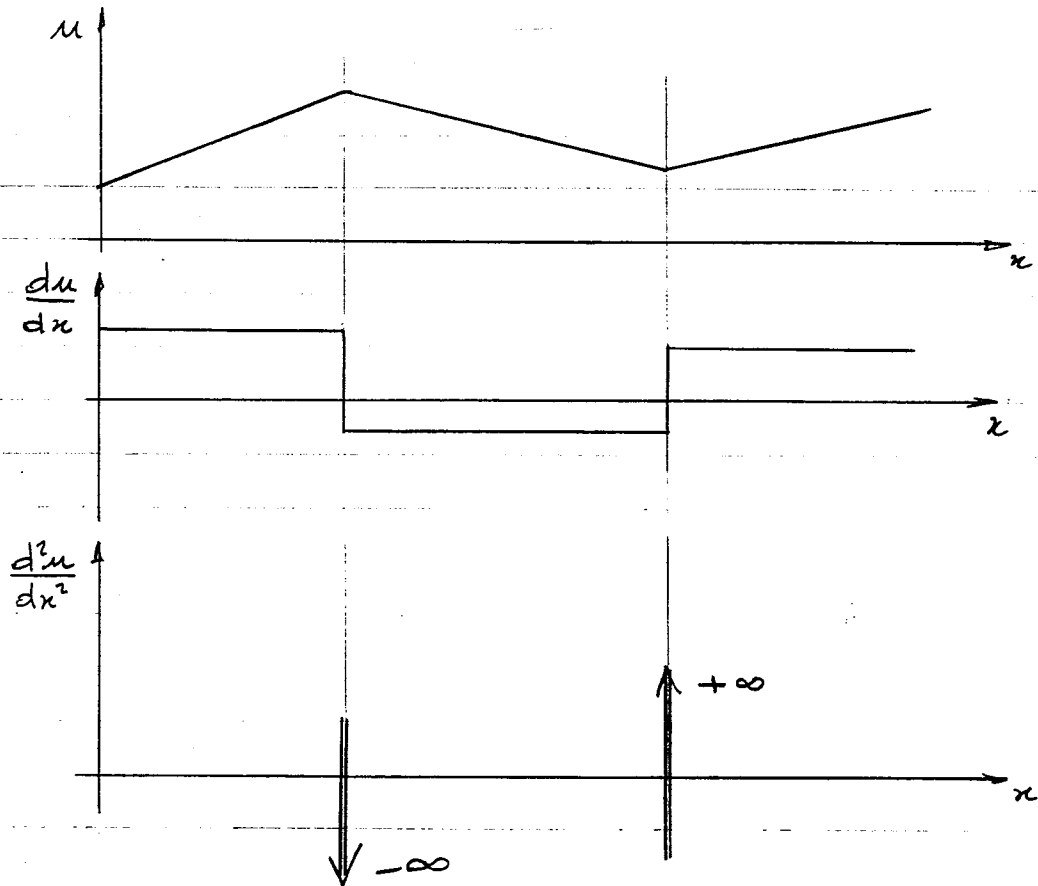
A idéia de somar contribuições de elementos discretos arbitrários para as correspondentes forças nodais globais (método da rigidez direta) tem um apelo intuitivo muito grande, especialmente para engenheiros estruturais. Esta maneira de interpretar o método dos elementos finitos não é, no entanto, rigorosa do ponto de vista matemático. Em outras palavras, é preciso que as expressões

$$\Pi_p = \sum_{i=1}^{nelem} \Pi_{pi} \quad e \quad \int_V (\quad) dV = \sum_{i=1}^{nelem} \int_{V_{elem}} (\quad) dV_{elem}$$

sejam válidas. E quando é que isto é válido? No exemplo unidimensional, o funcional Π_p envolve derivada a primeira da função de deslocamentos, que são deformações. Isto quer dizer que, embora as deformações possam ser descontínuas de um elemento para outro, a integral das deformações (ao quadrado) dentro de cada elemento e na fronteira dos elementos deve resultar em um valor finito.

Dito de outra maneira, para que se possa garantir a convergência da solução, é necessário que a o funcional Π_p não tenha contribuições da integração através das fronteiras dos elementos.

Ainda no caso unidimensional com efeito axial, a aproximação da função de deslocamentos no encontro de dois elementos (funções de forma lineares) pode ser mostrada abaixo.



Vê-se, portanto, que a integral do funcional com integrando que envolve termos somente em u e $\frac{du}{dx}$ não recebe contribuições de integração através das $\frac{du}{dx}$ fronteiras dos elementos. Se o funcional contivesse termos em $\frac{d^2u}{dx^2}$, a expressão

$\Pi_p = \sum_{i=1}^{n_{elem}} \Pi_{p_i}$ não seria válida, pois a integral através da fronteira dos elementos também contribuiria para o funcional Π_p . Neste caso, não somente a aproximação para os deslocamentos devem ser contínuas, mas também a aproximação para sua primeira derivada deve ser contínua.

Este é justamente o caso de vigas com cargas transversais. O funcional da energia potencial total contém termos em $\frac{d^2u}{dx^2}$. Portanto, as rotações tem que ser compatíveis nos encontros dos elementos. Desta forma existe apenas uma discontinuidade na aproximação de $\frac{d^2u}{dx^2}$, mas não existe um "pico" infinito.

É por isso que em um modelo de viga com carga transversal existem dois graus de liberdade por nó: o deslocamento transversal e a rotação.

Sempre que as condições de compatibilidade de deslocamentos for satisfeita na fronteira dos elementos a formulação do método dos elementos finitos é válida. Na verdade esta é uma imposição do método de Rayleigh - Ritz que exige funções de aproximação admissíveis, isto é, que satisfazem as condições de compatibilidade em todos os pontos do domínio. Isto é uma condição para a convergência do método.

Entretanto, existem casos em que, mesmo nos satisfazendo as condições de compatibilidade nas fronteiras dos elementos, as integrais do funcional através destas fronteiras em nada contribuem. Neste caso, a aproximação do método dos elementos finitos é válida pois não há perda de energia quando se calcula a energia potencial total através da soma das energias vindas de cada elemento individualmente.