

## ***Integração Numérica Reduzida Adequada***

### **Introdução**

Uma integração numérica de ordem menor do que a necessária para integrar exatamente a matriz de rigidez de um elemento é denominada de “integração reduzida” e pode ser desejável por dois motivos:

- Um menor número pontos de Gauss acarreta em uma economia computacional.
- Integração reduzida tende a tornar o elemento mais flexível, portanto (espera-se) compensando o comportamento rígido associado a uma configuração de deslocamentos pré-estabelecida.

O elemento torna-se mais flexível com integração reduzida quando alguns termos de ordem mais alta que de outra forma iriam contribuir para a energia de deformação não o fazem porque suas contribuições se anulam nos pontos de Gauss da integração reduzida. Em outras palavras, com um menor número de pontos de amostragem, alguns dos modos de deformação mais complicados oferecem menos resistência do que o fariam com uma integração completa.

Espera-se com a integração reduzida que modos de deformação indesejados sejam ‘filtrados’ e retirados da formulação. Desta forma um elemento mais flexível e mais eficiente pode ser obtido. É, portanto, necessário determinar:

- (a) a mínima ordem de quadratura necessária para permitir a convergência de um modelo;
- (b) a ordem de quadratura necessária para manter a velocidade de convergência que seria obtida por uma integração completa; e
- (c) as condições para que o erro na integração numérica compense apropriadamente a super-estimação da rigidez de uma estrutura modelada por elementos finitos em deslocamentos.

O comportamento de um elemento com integração numérica reduzida não pode afetar as condições de convergências. Portanto, a resposta de um elemento, mesmo com integração reduzida, tem que sempre representar todos os termos de deformação constante.

Deve ser observado, também, que uma integração reduzida é, em essência, sempre utilizada implicitamente quando a distorção de um elemento finito é tal que a ordem da quadratura escolhida não vai integrar exatamente a matriz de rigidez.

### **Mínima ordem de quadratura para convergência**

A regra de quadratura utilizada pelo modelo de elementos finitos deve ser no mínimo suficiente para integrar o volume do elemento exatamente. Isto vem do fato que com o refinamento da malha o tamanho dos elementos diminui e o comportamento dos elementos se aproxima cada vez mais de um estado de deformação constante.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [E] \{\epsilon\} t |J| d\xi d\eta = \text{const.} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t |J| d\xi d\eta$$

O integrando da parte esquerda da equação acima tende a uma constante a medida que o tamanho do elemento diminui e a integral da direita corresponde ao volume do elemento.

Portanto, para um elemento de geometria arbitrária, a integração mínima requerida é uma quadratura que integra exatamente  $t |J|$  no caso plano. Para um elemento bi-linear com espessura constante,  $t |J|$  é linear em cada direção paramétrica, então somente um ponto de Gauss é necessário. Para um elemento quadrático no caso mais geral,  $t |J|$  contém potências cúbicas das coordenadas paramétricas, então uma integração de Gauss  $2 \times 2$  é necessária.

Entretanto, a condição de convergência é requerida somente no limite a medida que a malha é refinada. Neste caso, a subdivisão indefinida acarreta em elementos de lados retos e paralelos (determinante do Jacobiano constante). Portanto, no limite, um único ponto de Gauss seria necessário.

Deve-se observar que, como será visto mais adiante, a utilização de uma integração tão reduzida como a mínima para convergência pode provocar o aparecimento de modos espúrios de deformação, e a ordem de quadratura recomendada será maior do que a mínima.

### Ordem de integração para não afetar a velocidade de convergência

A regra de integração mínima é geralmente inaceitável por dois motivos. Em primeiro porque ela pode provocar instabilidade do modelo (modos espúrios de deformação). Em segundo, mesmo que esta integração preserve a convergência, ela vai resultar em uma perda na velocidade de convergência

No outro extremo de precisão pode-se requerer uma regra de quadratura que integre exatamente a matriz de rigidez do elemento. Isto só é possível quando o integrando é um polinômio, o que significa que o Jacobiano deve ser constante, isto é, um elemento não distorcido. Isto vai exigir uma ordem de quadratura muito alta, muitas vezes desnecessária pois a integração exata resulta em uma aproximação para o campo de deslocamentos que é muito rígida.

A partir destas considerações deseja-se uma quadratura que se situe entre estes dois extremos. Por exemplo, pode-se requerer que o erro provocado pela ordem de quadratura seja comparável ao erro de discretização. Está é a lógica por trás do seguinte argumento: a ordem de quadratura deve ter precisão suficiente para preservar a velocidade de convergência devida ao erro de discretização.

A quantidade mais natural para se medir a velocidade de convergência é o erro na avaliação da energia potencial total. Termos de deformação na expressão da energia potencial total são considerados completos até o grau  $(p-m)$  (para um elemento não distorcido pois a convergência é considerada no limite quando o tamanho do elemento tende a zero), onde

$p =$  grau do polinômio completo de mais alto grau presente nas funções de interpolação do elemento;  
 $m =$  ordem de diferenciação presente na expressão da energia potencial total. É a ordem de diferenciação que aparece na matrix  $[B]$  que obtém deformações em um ponto no elemento em função de deslocamentos nodais.

Conclui-se que para não reduzir a velocidade de convergência é necessário integrar exatamente um polinômio de grau  $2(p-m)$ , que é o grau do polinômio completo contido em  $[B]^T[E][B]$ . Neste caso, a ordem do erro de aproximação vai ser  $O(h^{2(p-m)+1})$ , onde  $h$  é um tamanho característico do elemento, porque somente os termos de grau  $2(p-m)$  podem ser representados corretamente.

Considerando-se uma quadratura com  $n$  pontos de amostra e sabendo-se que estes  $n$  pontos integram exatamente um polinômio de grau  $2n-1$ , tem-se:

$$2n-1 = 2(p-m) \Rightarrow n = (p-m) + 1/2$$

ou,

$$n = (p-m) + 1$$

Exemplos:

|                       |           |               |   |
|-----------------------|-----------|---------------|---|
| elementos lineares    | $(p = 1)$ | $\Rightarrow$ | $n = 1$ ponto de Gauss em cada direção  |
| elementos quadráticos | $(p = 2)$ | $\Rightarrow$ | $n = 2$ pontos de Gauss em cada direção |
| elementos cúbicos     | $(p = 3)$ | $\Rightarrow$ | $n = 3$ pontos de Gauss em cada direção |

## Análise de autovalor de um elemento

A análise de autovalor é utilizada para testar a qualidade de elementos, incluindo detecção de movimentos associados a uma energia de deformação nula, invariância quanto à orientação, etc. Um problema de autovalor deve ser resolvido para fazer este teste. Para um elemento finito genérico, o problema de autovalor é expresso por

$$[\mathbf{k}]\{\mathbf{d}\} = \lambda\{\mathbf{d}\} \quad \text{ou} \quad ([\mathbf{k}] - \lambda[\mathbf{I}])\{\mathbf{d}\} = 0 \quad (1)$$

onde  $[\mathbf{k}]$  é a matriz de rigidez do elemento e  $\{\mathbf{d}\}$  é o vetor de deslocamentos nodais do elemento.

Para um autovalor específico  $\lambda_i$  e o seu autovetor associado  $\{\mathbf{d}_i\}$ , a energia de deformação é

$$U_i = 1/2 \{\mathbf{d}_i\}^T [\mathbf{k}] \{\mathbf{d}_i\} \quad \text{ou} \quad 2U_i = \{\mathbf{d}_i\}^T [\mathbf{k}] \{\mathbf{d}_i\} \quad (2)$$

Pode-se escrever a equação (1) como

$$([\mathbf{k}] - \lambda_i[\mathbf{I}])\{\mathbf{d}_i\} = 0 \quad (3)$$

A equação acima pode ser pré-multiplicada por  $\{\mathbf{d}_i\}^T$  e então expandida como

$$\{\mathbf{d}_i\}^T [\mathbf{k}] \{\mathbf{d}_i\} = \lambda_i \{\mathbf{d}_i\}^T [\mathbf{I}] \{\mathbf{d}_i\} \quad (4)$$

na qual, a partir da equação (2), o expressão do lado esquerdo é igual a  $2U_i$ . Se o autovetor  $\{\mathbf{d}_i\}$  for normalizado de forma que

$$\{\mathbf{d}_i\}^T \{\mathbf{d}_i\} = 1 \quad (5)$$

a equação (4) resulta em

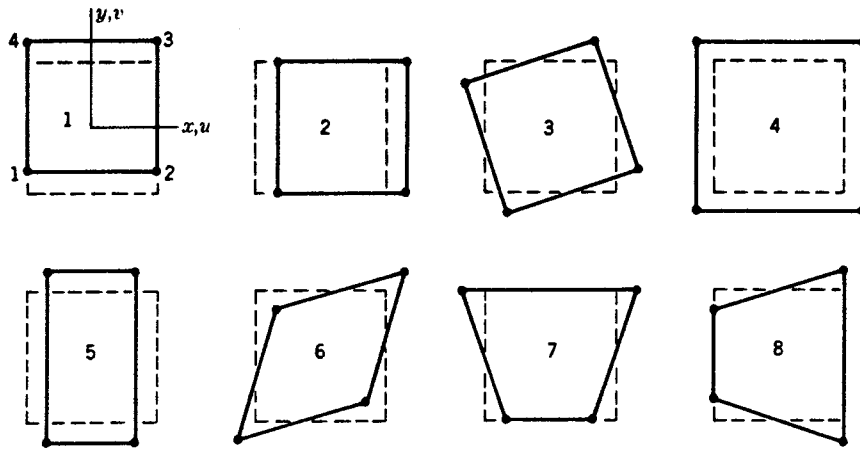
$$\lambda_i = \{\mathbf{d}_i\}^T [\mathbf{k}] \{\mathbf{d}_i\} = 2U_i \quad (6)$$

Portanto cada autovalor da matriz de rigidez é igual ao dobro da energia de deformação induzida por um conjunto de deslocamentos nodais normalizados.

Desta forma, os autovalores da matriz de rigidez de um elemento e os seus autovetores associados podem representar o comportamento de um elemento. Com isso, a qualidade de um elemento pode ser também aferida com base em uma análise de autovalor.

Os autovetores que correspondem a autovalores nulos representam movimentos de corpo rígido ou modos de deformação com energia nula. No caso dos modos de corpo rígido, os deslocamentos estão associados a forças nodais nulas. Existem três modos de corpo rígido linearmente independentes para um elemento de estado plano. A matriz de rigidez de um elemento deve ter o número apropriado de autovalores nulos de forma que o elemento possa representar todos os possíveis movimentos de corpo rígido. Também existem modos de energia nula associados a uma integração numérica reduzida (vide seção a seguir). Estes são chamados de modos de deformação "espúrios".

A figura a seguir mostra os oito modos de deformação de um elemento plano bi-linear. O três primeiros podem ser identificados como modos de corpo rígido. Os modos 4, 5 e 6 são modos de deformação constantes. E os modos 7 e 8 estão associados a uma 'flexão' do elemento.



### Ordem de integração para evitar singularidade na matrix de rigidez global e modos de deformação espúrios

Com a utilização de integração numérica para a obtenção da matrix de rigidez de um elemento, a integração analítica é substituída por uma soma ponderada de relações independentes entre os parâmetros nodais. Estas relações fornecem o único tipo de informação que é utilizada para a construção da matrix de rigidez do elemento.

A seleção da ordem de integração afeta os resultados de uma análise de autovalor de um elemento porque um modo de energia nula aparece quando um conjunto de deslocamentos nodais produz um campo de deformações que é nulo em todos os pontos de Gauss. Nestes modos de energia nula estão incluídos os movimentos de corpo rígido que obviamente produzem deformações nulas em qualquer ponto do elemento, em particular nos pontos de Gauss. Se um elemento com movimentos de corpo rígido impedidos apresenta um ou mais modos de energia nula, então sua matrix de rigidez é singular.

Modos espúrios de energia nula aparecem quando alguns termos de ordem mais alta que de outra forma iriam contribuir para a energia de deformação não o fazem porque suas contribuições se anulam nos pontos de Gauss da integração reduzida. O número de modos espúrios de energia nula  $Z$  para um elemento pode ser previsto pela seguinte fórmula:

$$Z = C - E \quad \begin{cases} \leq 0 & \Rightarrow \text{estável} \\ > 0 & \Rightarrow \text{modos de deformação espúrios} \end{cases} \quad (7)$$

onde  $C$  é o número de condições independentes necessárias para um elemento estaticamente determinado não ser singular:

$$C = (\text{n}^\circ \text{ de graus de liberdade}) - (\text{n}^\circ \text{ de modos de corpo rígido})$$

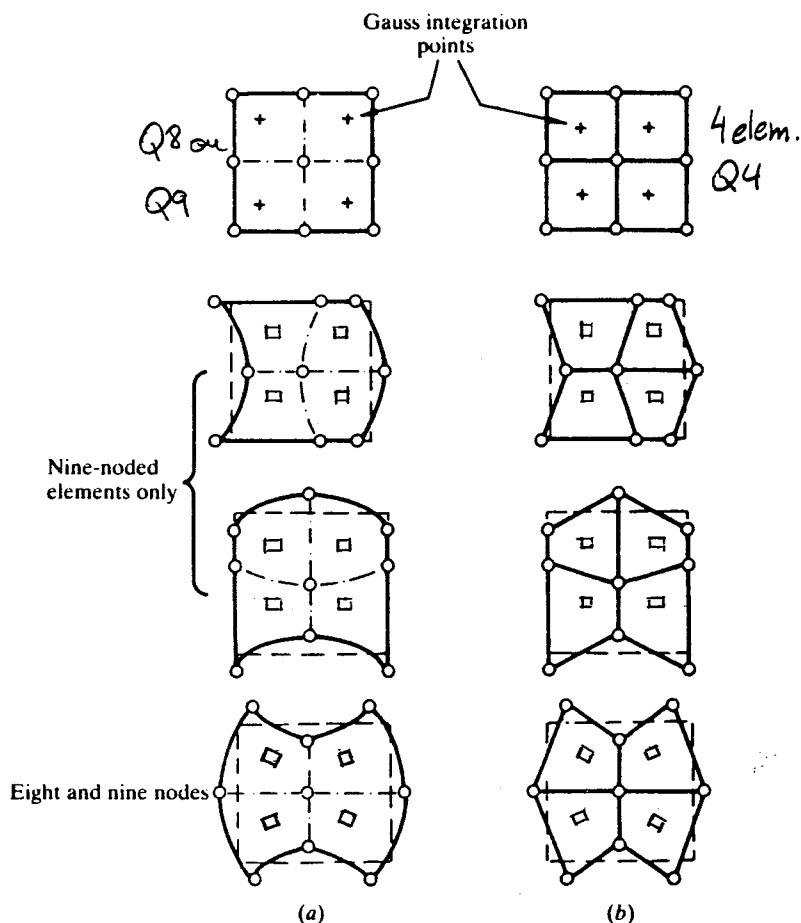
e  $E$  é o número de equações independentes usadas para construir  $[k]$  via integração numérica:

$$E = (\text{n}^\circ \text{ de pontos de Gauss}) \times (\text{n}^\circ \text{ de componentes de deformação})$$

Para elasticidade bidimensional, cada ponto de Gauss introduz três relações de deformação independentes (três componentes de deformação).

A partir da expressão (7) pode-se selecionar uma ordem de quadratura que resulte em um elemento estável, isto é, sem modos espúrios. Entretanto, não é somente o número de pontos de Gauss que é importante. O teste mais seguro é uma análise de autovalor do elemento para se conhecer todos os possíveis modos de energia nula.

A figura a seguir mostra exemplos de alguns modos espúrios. A coluna da esquerda da figura mostra modos de energia nula para um elemento quadrático (Q8 ou Q9) com uma regra de quadratura 2x2, e a coluna da direita mostra um conjunto de quatro elementos bi-lineares (Q4) com integração de um ponto de Gauss cada um. Observe que os quadrados infinitesimais situados nos pontos de Gauss permanecem indeformados para todos os modos espúrios mostrados.



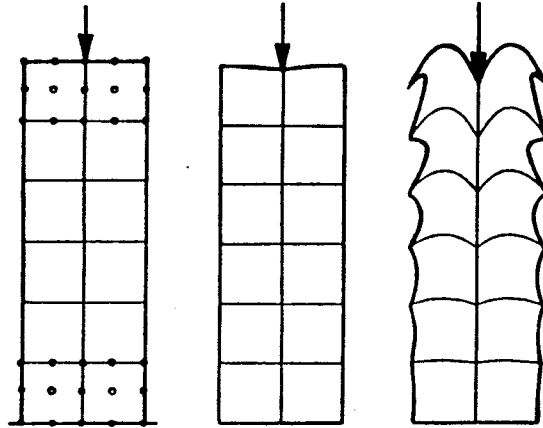
(a) Zero energy (singular) modes for eight- and nine-noded quadratic elements and (b) for a patch of bilinear elements with single integration points

Observe também que os modos espúrios são apresentados em cada linha da figura de forma semelhante para os elementos quadrático e linear. Na primeira coluna da figura, a segunda e a terceira linha mostram modos de energia nula para o elemento com 9 nós somente (estes modos não se apresentam para o elemento com 8 nós), e a quarta linha mostra um modo espúrio que aparece tanto no elemento com 9 quanto no elemento com 8 nós.

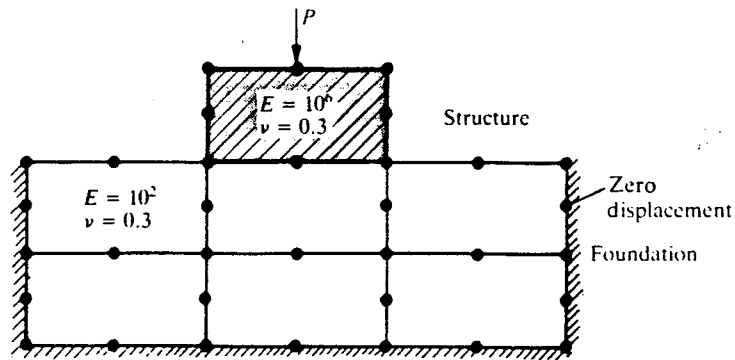
Os modos espúrios podem ser divididos em dois grupos:

- (a) Modos compartilhados por elementos adjacentes. Exemplos são os modos da segunda e terceira linha da figura.
- (b) Modos não compartilhados por elementos adjacentes. Exemplos são os modos da quarta linha da figura.

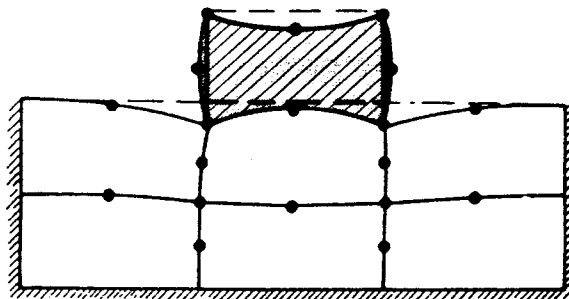
A figura a seguir mostra um exemplo de como uma integração reduzida pode excitar um modo espúrio compartilhado por vários elementos. A figura mostra um pilar modelado por elementos quadriláteros Lagrangeanos com 9 nós submetido a uma carga pontual. Dois tipos de integração numérica são utilizados: integração completa 3x3 (figura do meio) e integração reduzida 2x2 (figura da direita). Observe que, como os deslocamentos são restringidos na base, o efeito do modo espúrio vai decaindo do topo para a base do pilar. No entanto, é evidente que a resposta da estrutura é bastante influenciada pela presença do modo espúrio compartilhado.



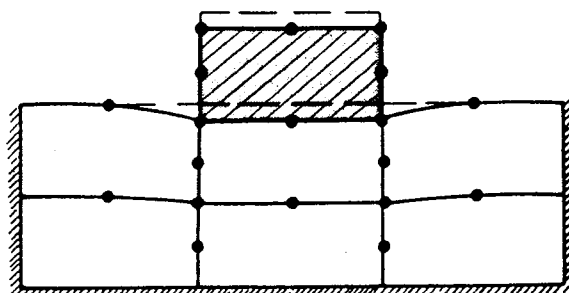
O efeito de um modo espúrio não compartilhado pode ser ilustrado a partir da figura a seguir. Neste exemplo a 'estrutura' é modelada por um único elemento quadrático de 8 nós, bem mais rígido do que a 'fundação' sobre a qual está centrada. O uso de uma integração reduzida 2x2 leva a uma resposta que claramente é afetada pelo modo espúrio não compartilhado deste elemento, enquanto que o resultado com uma integração completa 3x3 não apresenta esta influência.



(a) Problem and mesh



(b) 2 x 2 integration



(c) 3 x 3 integration

Deve ser observado que o modelo global não apresenta nenhum modo de energia nula pois mais de um elemento foi utilizado e existem condições de suporte suficientes no modelo. No entanto, a grande diferença entre a rigidez da estrutura e da fundação provocou o aumento da influência do modo espúrio quando se utilizou a integração 2x2.

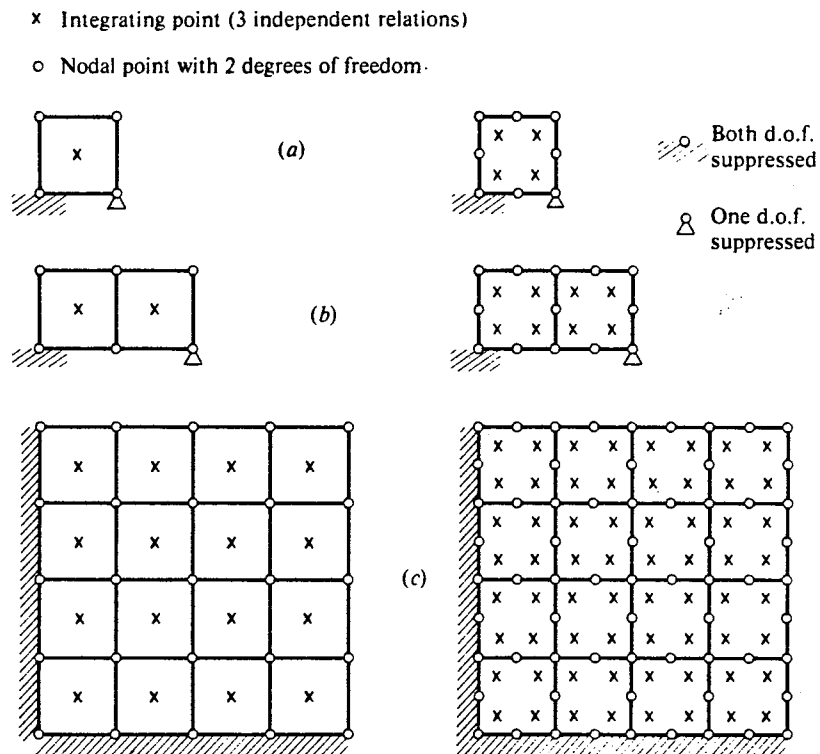
O exemplo anterior sugere que modos de energia nula de um elemento isolado, compartilhados ou não, podem ser eliminados quando o elemento é agrupado com outros elementos em uma malha e se um suficiente número de condições de suporte é considerado no modelo global. Neste caso, a expressão (7) anterior também pode ser utilizada para fornecer um indicativo sobre a estabilidade do modelo global. A única diferença estaria em interpretar  $C$  como:

$$C = (\text{n}^\circ \text{ de graus de liberdade total}) - (\text{n}^\circ \text{ de graus de liberdade restringidos})$$

A condição de estabilidade fica estabelecida da seguinte forma:

“Se o número total de incógnitas  $C$  excede o número total de relações independentes  $E$  introduzidas por todos os pontos de Gauss do modelo, então a matriz de rigidez global do modelo é singular”.

Isto é ilustrado na figura abaixo para modelos com elementos lineares e quadráticos.



|     | LINEAR                  |                              | QUADRATIC              |                               |
|-----|-------------------------|------------------------------|------------------------|-------------------------------|
|     | Degrees of Freedom      | Independent Relation         | Degrees of Freedom     | Independent Relation          |
| (a) | $4 \times 2 - 3 = 5$    | $1 \times 3 = 3$<br>singular | $2 \times 8 - 3 = 13$  | $4 \times 3 = 12$<br>singular |
| (b) | $6 \times 2 - 3 = 9$    | $2 \times 3 = 6$<br>singular | $13 \times 2 - 3 = 23$ | $8 \times 3 = 24$             |
| (c) | $25 \times 2 - 18 = 32$ | $16 \times 3 = 48$           | $48 \times 2 = 96$     | $64 \times 3 = 192$           |

## Ordem de integração para aproximação ótima de tensões e deformações

Dois fatos devem ser considerados a fim de se poder achar uma ordem de quadratura ótima para representação de tensões (ou deformações):

- (a) A formulação em deslocamentos do método dos elementos finitos pode ser interpretada como um procedimento para determinar uma solução aproximada pelo método dos erros mínimos quadráticos onde a medida de erro é uma função ponderada dos erros em tensão (ou deformação). Em outras palavras, a minimização da energia potencial total é equivalente a determinar uma aproximação mínima quadrática para as deformações exatas.

Pode-se demonstrar o seguinte teorema (veja Zienkiewicz ou Hinton e Campbell): a minimização do funcional da energia potencial total definido como

$$\pi_p = \int_V \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [E] \{\epsilon\} dV + \int_V \{u\}^T \{f\} dV$$

que fornece, com a discretização por elementos finitos, uma solução aproximada  $\{u\}$  para a solução exata  $\{\bar{u}\}$  é equivalente à minimização de um outro funcional definido como

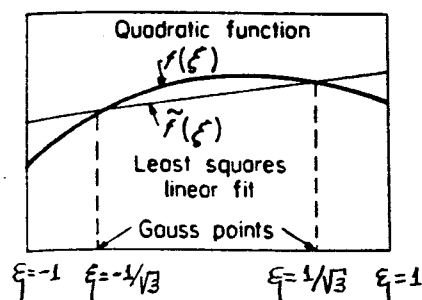
$$\pi_p^* = \int_V \frac{1}{2} (\{\epsilon\} - \{\bar{\epsilon}\})^T [E] (\{\epsilon\} - \{\bar{\epsilon}\}) dV$$

onde  $\{\epsilon\}$  e  $\{\bar{\epsilon}\}$  são as soluções para deformações aproximadas e exatas respectivamente. Observa-se que a minimização do último funcional tem um caráter de aproximação mínima quadrática.

- (b) Se um polinômio de  $n$ -ésimo grau  $f(\xi)$  (onde  $-1 \leq \xi \leq 1$ ) é amostrado em  $n$  pontos de uma quadratura de Gauss de  $n$ -ésima ordem, então os  $n$  valores de  $f(\xi)$  avaliados nestes pontos definem univocamente (interpolam) um novo polinômio  $\tilde{f}(\xi)$  de grau  $n-1$  que é uma aproximação mínima quadrática para  $f(\xi)$ .

Dito de outra forma, quando um polinômio de grau  $n-1$  é usado para aproximar no sentido de erros mínimos quadráticos um polinômio de grau  $n$ , é evidente que em alguns pontos a solução aproximada ( $n-1$ ) deve ser igual à solução exata ( $n$ ). Pode-se mostrar (veja Hinton e Campbell) que estes pontos correspondem aos pontos da quadratura de Gauss de  $n$ -ésima ordem (que integram exatamente um polinômio de grau  $2n-1$ ).

Isto é mostrado na figura abaixo para uma função quadrática. Esta proposição é exata para integração de Gauss em uma dimensão e aproximadamente satisfeita para integração em duas e três dimensões de elementos de forma distorcida.



Aliado ao primeiro fato, deve-se considerar que dentro da formulação em deslocamentos do método dos elementos finitos o campo de deformações exatas pode ser no melhor caso aproximado por polinômios locais  $\{\epsilon\} = [B]\{u\}$  de grau completo  $(p-m)$ , onde  $p$  é o grau das funções de forma



do elemento e  $m$  é a ordem de diferenciação em  $[B]$ . Portanto, a melhor aproximação disponível vai ser uma aproximação mínima quadrática por polinômios locais de grau  $(p-m)$ .

Considerando também o segundo fato, para se poder extrair o máximo da melhor aproximação disponível  $\hat{f} = [B]\{u\}$  com grau  $(n-1) = (p-m)$ , deve-se utilizar uma quadratura com

$$n = (p-m) + 1$$

pontos de Gauss em cada direção. Neste caso, como uma quadratura de Gauss com  $(p-m) + 1$  pontos integram exatamente um polinômio de grau  $2(p-m) + 1$ , a ordem do erro de aproximação vai ser  $O(h^{2(p-m)+2})$ , onde  $h$  é o tamanho do elemento.

Estas considerações foram feitas para elementos sem distorções de forma. No entanto, o caráter de aproximação no sentido de erros mínimos quadráticos sempre está presente na formulação em deslocamentos do método dos elementos finitos. Isto justifica a utilização da mesma ordem de quadratura para amostragem ótima de tensões para elementos sem e com distorções de forma.

Esta regra de quadratura tem se mostrado a mais apropriada (fornecendo resultados bastante precisos) para elementos sem grandes distorções. Burnett sugere que para elementos com 'consideráveis' distorções, a precisão pode ser melhorada se uma quadratura com erro da ordem  $O(h^{2(p-m)+3})$  for utilizada, isto é, com  $n = (p-m) + 3/2$ , ou seja,  $n = (p-m) + 2$  pontos de Gauss.

### Resumo das quadraturas reduzidas apropriadas

Em seguida estão resumidas as regras para integração reduzida na computação da matriz de rigidez de um elemento.

#### *Regra I*

A regra de integração deve ser no mínimo suficiente para integrar o volume do elemento exatamente.

#### *Regra II*

Para preservar a velocidade de convergência da energia potencial total devido ao erro de discretização, deve-se usar uma regra de integração com uma precisão de  $O(h^{2(p-m)+1})$ , o que resulta em  $n = (p-m) + 1/2$ , ou seja,  $n = (p-m) + 1$  pontos de Gauss em cada direção (integração não-triangular).

#### *Regra III*

A regra de integração deve ser escolhida de forma que o número total de incógnitas não exceda o número total de relações independentes introduzidas por todos os pontos de Gauss do modelo (no caso de elasticidade plana, 3 relações por cada ponto de Gauss), o que resultaria em uma matriz de rigidez global singular.

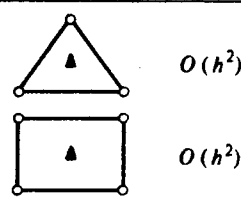
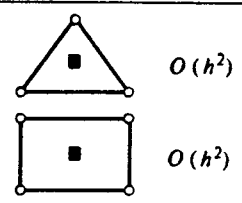
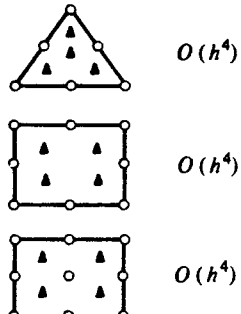
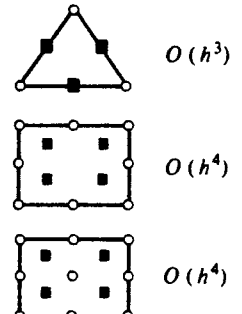
#### *Regra IV*

Para uma amostragem ótima de deformações (e tensões), deve-se usar uma regra de integração com uma precisão de  $O(h^{2(p-m)+2})$ , o que resulta em  $n = (p-m) + 1$  pontos de Gauss em cada direção (integração não-triangular).

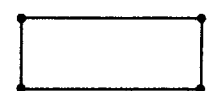

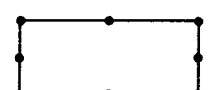

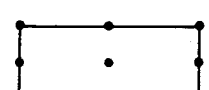
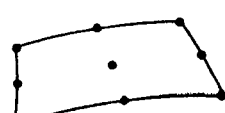
#### *Regra V*

Para elementos com 'consideráveis' distorções, a precisão pode ser melhorada se uma quadratura com erro da ordem  $O(h^{2(p-m)+3})$  for utilizada, isto é, com  $n = (p-m) + 3/2$ , resultando em  $n = (p-m) + 2$  pontos de Gauss em cada direção (integração não-triangular).

A figura a seguir mostra as quadraturas de Gauss para alguns elementos planos de continuidade  $C^0$  segundo as regras *IV* e *II*.

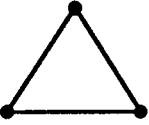

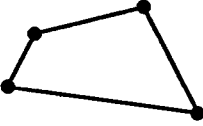
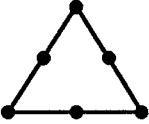
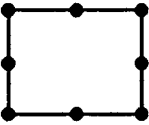
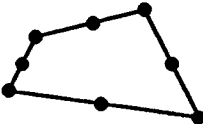

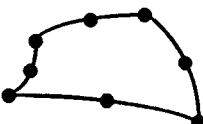
| $p$ | Regra IV $O(h^{2(p-m)+2})$  | Regra II $O(h^{2(p-m)+1})$   |
|-----|---|--|
| 1   | $O(h^2)$  | $\geq O(h)$  |
|     |  |  |
| 2   | $O(h^4)$  | $\geq O(h^3)$  |
|     |  |  |

A figura a seguir (veja Bathe) resume resultados de análise de convergência e estabilidade para alguns elementos quadriláteros planos. A quadratura 'confiável' ("reliable") corresponde à avaliação exata da matriz de rigidez do elemento retangular (não distorcido). No caso de elementos distorcidos a ordem de integração mostrada deve ser suficiente.

| Element  | Reliable integration order | Reduced integration used in practice (with spurious zero energy mode(s)) |
|--|----------------------------|--|
| 4-node            | $2 \times 2$               | —  |
| 4-node distorted  | $2 \times 2$               | —  |
| 8-node            | $3 \times 3$               | $2 \times 2$   |
| 8-node distorted  | $3 \times 3$               | $2 \times 2$   |
| 9-node            | $3 \times 3$               | $2 \times 2$   |
| 9-node distorted  | $3 \times 3$               | $2 \times 2$   |

## Quadraturas de Gauss para Elementos $C^0$ Bidimensionais

(O número de pontos de Gauss para cada quadratura é indicado)

| Elemento  | Modelo Desloc. | Modelo Geom. | Regra <sup>1</sup><br>I | Regra<br>II | Regra <sup>2</sup><br>III | Regra<br>IV | Regra <sup>3</sup><br>V |
|---|----------------|--------------|-------------------------|-------------|---------------------------|-------------|-------------------------|
|    | Linear         | Triangular   | 1                       | 1           | 1                         | 1           | 1                       |
|    | Linear         | Retangular   | 1x1                     | 1x1         | 2x2                       | 1x1         | 1x1                     |
|    | Linear         | Linear       | 1x1                     | 1x1         | 2x2                       | 1x1         | 2x2                     |
|   | Quadrático     | Triangular   | 1                       | 3           | 3                         | 4           | 4                       |
|  | Quadrático     | Retangular   | 1x1                     | 2x2         | 3x3                       | 2x2         | 2x2                     |
|  | Quadrático     | Linear       | 1x1                     | 2x2         | 3x3                       | 2x2         | 3x3                     |
|  | Quadrático     | Quadrático   | 4                       | 3           | 3                         | 4           | 4 ou 7                  |
|  | Quadrático     | Quadrático   | 2x2                     | 2x2         | 3x3                       | 2x2         | 3x3                     |

<sup>1</sup> Modos espúrios de deformação associados a uma energia de deformação nula podem aparecer.

<sup>2</sup> Baseado na análise de um único elemento isolado com condições de suporte mínimas essenciais para impedir movimentos de corpo rígido.

<sup>3</sup> Os números de pontos de Gauss indicados correspondem a quadraturas normalmente utilizadas para elementos distorcidos ou não.

## Referências

- Cook, R.D., Malkus, D.S., e Plesha, M.E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, Terceira Edição, John Wiley & Sons, 1989. Seções 6.11 e 6.12.
- Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R.L., *The Finite Element Method - Volume 1 Basic Formulation and Linear Problems*, Quarta Edição, McGraw-Hill, 1989. Seções 8.11, 11.4, 11.6 e 12.6.2.
- Bathe, K.-J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, 1982. Seção 5.8.1.
- Burnett, D.S., *Finite Element Analysis - From Concepts to Applications*, Addison-Wesley, 1987. Seção 8.3.1.
- Hinton, E. e Campbell, J.S., "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions using a Least Square Method", *Int.J.Num.Meth.Engng.*, Vol. 8, pp.461-480, 1974.
- Shen, T.-H.G., "An Educational Computer Graphics Program for Examining the Behavior of Single Two-Dimensional Finite Elements", MSc Thesis, *Cornell University, School of Civil and Environmental Engineering*, 1988. Seção 4.4.

## Obtenção de Tensões

Uma vez determinado os deslocamentos nodais de um modelo de elementos finitos, as deformações e as tensões de um ponto qualquer de um elemento podem ser obtidas por

$$\{\epsilon\} = [B]\{d\} \quad e \quad \{\sigma\} = [E][B]\{d\}$$

A pergunta que se faz é: aonde dentro do elemento deve-se calcular as tensões?

A discussão anterior sobre integração reduzida para a computação da matriz de rigidez do elemento indica que existe um determinado número de pontos de amostragem onde as deformações (e tensões) têm um grau de precisão melhor do que em qualquer outro ponto.

Estes pontos correspondem a  $n = (p-m) + 1$  pontos de Gauss em cada direção, onde  $p$  é o grau do polinômio completo de mais alto grau das funções de interpolação do elemento e  $m$  é a ordem de diferenciação presente em  $[B]$  (elemento não distorcido).

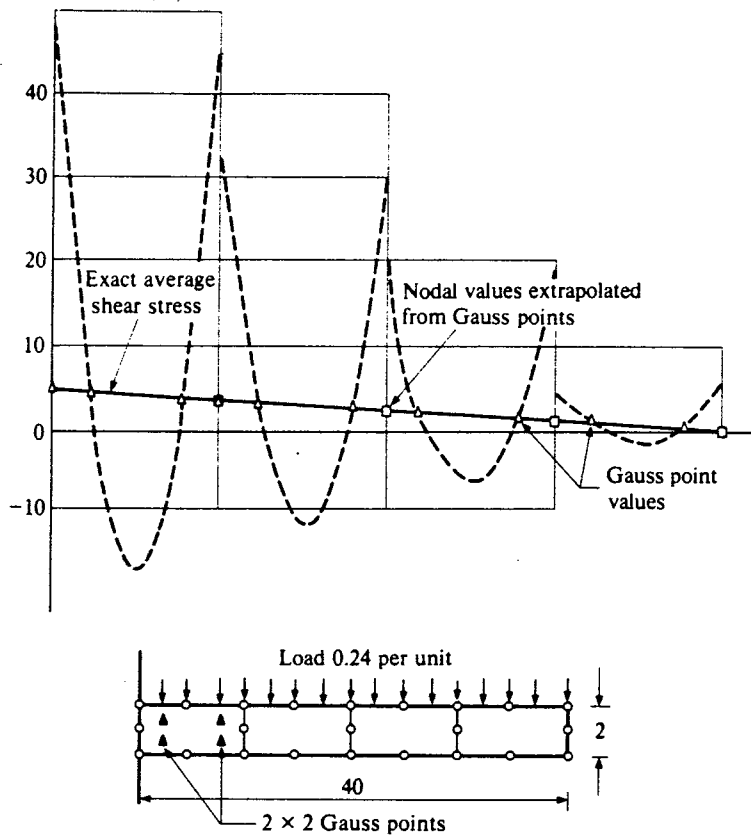
O erro na aproximação das deformações  $\{\epsilon\} = [B]\{d\}$ , que é um polinômio com grau  $(p-m)$ , é da ordem  $O(h^{(p-m)+1})$ , onde  $h$  é um tamanho característico do elemento. Avaliando  $\{\epsilon\}$  em  $(p-m) + 1$  pontos de Gauss em cada direção (que integram exatamente um polinômio de grau  $2(p-m) + 1$ ), o erro na aproximação vai ser da ordem  $O(h^{(p-m)+2})$ , portanto uma ordem melhor.

As deformações (ou tensões) avaliadas nestes pontos quando interpoladas resultam, no caso unidimensional, em um polinômio de grau  $(p-m)$  que é uma aproximação mínima quadrática para um polinômio de grau  $(p-m)+1$ . Este caráter de aproximação mínima quadrática é consistente com a formulação em deslocamentos do método dos elementos finitos, onde as soluções em deslocamentos são obtidas (pode-se mostrar) de forma a minimizar o quadrado do erro na aproximação de deformações (ou tensões).

No caso bidimensional (ou tridimensional) a interpolação de  $n \times n$  pontos de Gauss, onde  $n = (p-m)+1$ , não vai corresponder exatamente a uma aproximação mínima quadrática para as tensões (ou deformações), embora muitas vezes isto seja considerado.

Existem exemplos clássicos onde a obtenção de componentes de tensão (em especial tensões de cisalhamento) em pontos de Gauss de uma quadratura de ordem  $(p-m)+1$  pode fornecer resultados substancialmente melhores do que em outros pontos.

Seja por exemplo a análise de uma viga em balanço usando quatro elementos "serendipity" quadráticos com oito nós mostrados na figura a seguir. Enquanto os resultados para deslocamentos e tensão axial são excelentes, a tensão de cisalhamento apresenta uma distribuição parabólica em cada elemento que é uma aproximação muito ruim para as tensões corretas. Entretanto, os valores amostrados em pontos de Gauss de uma quadratura  $2 \times 2$  ( $n = p-m+1$ ) são uma excelente representação da tensão de cisalhamento média correta.



A cantilever beam with four quadratic (Q8) elements. Stress sampling at cubic order (2 x 2) Gauss points with extrapolation to nodes

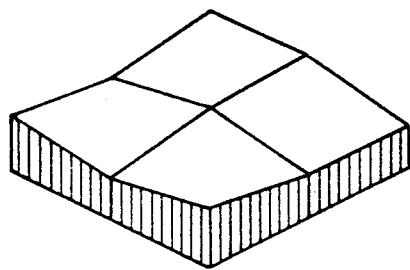
## • Extrapolação e suavização de tensões

Uma vez obtidos os resultados de tensões em pontos de Gauss de uma quadratura de ordem  $\mathcal{O}(h^{2(p-m)+2})$ , o que para o caso unidimensional corresponde a  $m=(p-m)+1$ , deseja-se obter uma representação global das tensões, de preferência na forma de valores médios nodais.

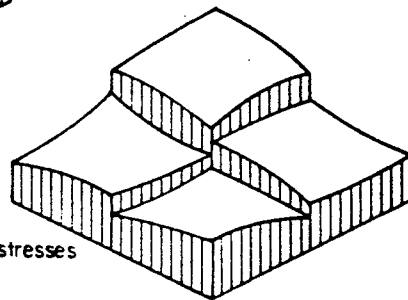
Portanto, os valores de tensões obtidos nos pontos de Gauss devem ser extrapolados para os nós e suavizados.

Este procedimento pode ser feito de uma forma global ou local. Na suavização global de tensões, os valores nodais de tensões são obtidos de forma a minimizar o erro global (de todo um modelo) na avaliação das tensões nos pontos de Gauss (veja Hinton e Campbell, "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 8, pp. 461-480, 1974).

O procedimento usual, no entanto, é uma suavização local de tensões. Neste caso os valores das tensões nos pontos de Gauss são extrapolados para os nós dentro de cada elemento. Após este passo, os valores de tensões para um determinado nó são diferentes em cada um dos elementos que contêm este nó. O passo seguinte, portanto, é a suavização dos valores nodais, o que normalmente é feito através de uma média dos valores vindos de cada elemento adjacente ao nó.



smoothed stresses



Unsmoothed stresses



A extrapolação dos valores nos pontos de Gauss para os nós pode ser feita de duas formas: Ou os valores são interpolados ou faz-se um ajuste no sentido dos erros mínimos quadráticos. (Estes procedimentos normalmente se confundem para o caso unidimensional).

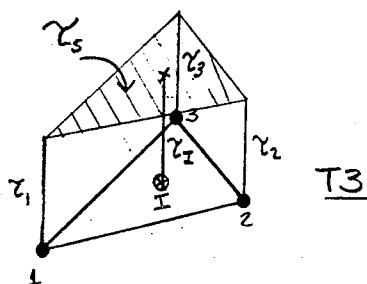
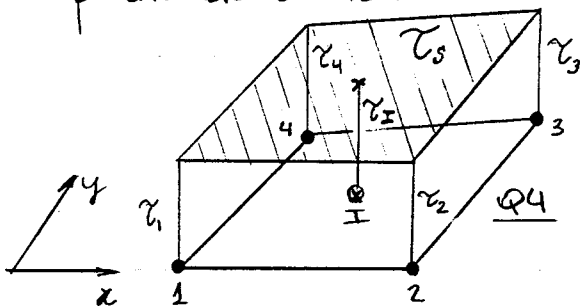
Qualquer que seja o procedimento, a curva (ou superfície) que extrapola dos pontos de Gauss para os nós é chamada de curva (ou superfície) de suavização  $\zeta_s$

A escolha entre interpolação dos valores de tensão nos pontos de Gauss e ajuste de erros mínimos quadráticos é por mera conveniência já que não existe evidência numérica mostrando a superioridade de um ou de outro procedimento.

De qualquer forma, o objetivo é obter uma matriz de transformação que relaciona as tensões nos pontos de Gauss ótimos para amostragem com as tensões nodais:

$$\{\zeta\}_{\text{nódes}} = [TR] \{\zeta\}_{\text{opt}}$$

No caso de elementos lineares ( $p=1$ ), o número de pontos de amostragem ótimos é  $n=(p-m)+1=1$ . Neste caso a superfície de suavização é um plano paralelo ao plano do elemento:



Para os elementos lineares, as tensões nodais extrapoladas têm o mesmo valor da tensão no ponto de Gauss. Assim,

$$\underline{Q4} \quad \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{Bmatrix}_{\text{nodes}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \{\chi_I\}_{\text{opt}}$$

$$\underline{T3} \quad \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{Bmatrix}_{\text{nodes}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \{\chi_I\}_{\text{opt}}$$

No caso de elementos quadráticos a superfície de suavização pode ser descrita em função de coordenadas cartesianas ou paramétricas do elemento. Existe uma vantagem computacional em se definir a superfície de suavização no espaço paramétrico pois existe uma única matriz  $[TR]$  aplicável para todos os elementos de um mesmo tipo, distorcidos ou não. Como também não existe evidência numérica de que um método é melhor do que outro, normalmente a superfície é descrita em coordenadas paramétricas. Portanto,

$$\chi_s = \chi_s(\xi, \eta).$$

Então, para se obter a matriz de extrapolação  $[TR]$ , deve-se inicialmente obter  $\chi_s$ .

Vai-se exemplificar primeiro a extrapolação nodal baseada na interpolação de valores nos pontos de Gauss para o elemento quadrático com oito nós (Q8).

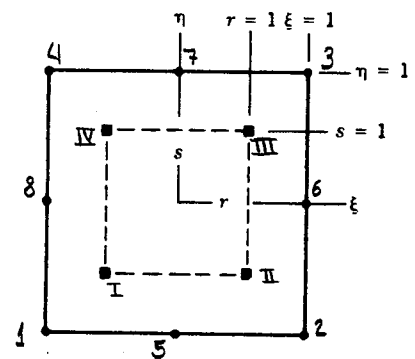
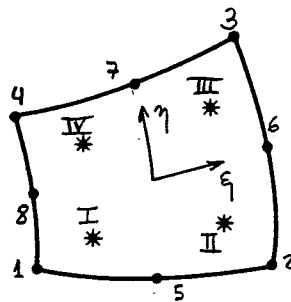
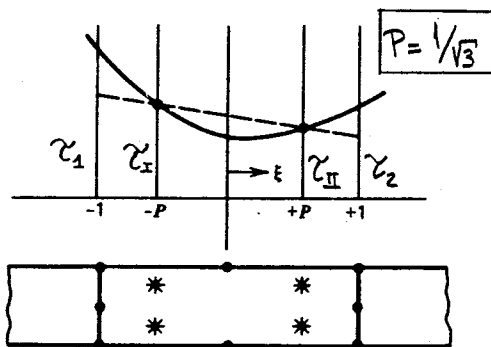
Como a amostragem ótima de tensões para este elemento é de  $2 \times 2$  pontos de Gauss, pode-se usar as funções de interpolação bilineares:

$$N_I = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$$

$$N_{II} = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

$$N_{III} = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$$

$$N_{IV} = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$



Usando estas funções de interpolação os valores nodais podem ser calculados como mostrado abaixo. Por exemplo no ponto 1,  $r=s=-1/P$ . Assim,

$$\tau_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} a^2 & ab & b^2 & ab \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_I \\ \tau_{II} \\ \tau_{III} \\ \tau_{IV} \end{Bmatrix}$$

onde,

$$a = 1 + \sqrt{3}, \quad b = 1 - \sqrt{3}.$$

No ponto 5,  $r=0$  e  $s=-1/P$ . Portanto,

$$\tau_5 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} a & a & b & b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_I \\ \tau_{II} \\ \tau_{III} \\ \tau_{IV} \end{Bmatrix}$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{c} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \\ \chi_5 \\ \chi_6 \\ \chi_7 \\ \chi_8 \end{array} \right\} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} a^2 & ab & b^2 & ab \\ ab & a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & ab & a^2 & ab \\ ab & b^2 & ab & a^2 \\ a & a & b & b \\ b & a & a & b \\ b & b & a & a \\ a & b & b & a \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \chi_I \\ \chi_{II} \\ \chi_{III} \\ \chi_{IV} \end{array} \right\}_{opt}$$

nodes

A interpolação bilinear foi feita porque existem exatamente quatro pontos de Gauss para a amostragem ótima de tensões do elemento quadrático com oito nós. Neste caso o número de coeficientes que define a superfície de suavização é quatro:

$$\chi_s(\xi, \eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi\eta.$$

No caso de uma superfície definida por uma aproximação mínima quadrática, o número de coeficientes no polinômio que define a superfície é menor do que o número de pontos de Gauss.

Pode-se justificar a escolha da extrapolação por aproximação mínima quadrática por três motivos:

- (a) É procedimento mais geral que a interpolação, independentemente do número de pontos de Gauss.
- (b) É consistente com a interpretação da formulação em deslocamentos do método dos elementos finitos como um procedimento onde a solução é obtida via uma aproximação mínima quadrática para as tensões.

(c) Elementos de ordem mais alta provavelmente comportam-se melhor com uma extrapolação por ajuste mínimo quadrático pois eles têm um grande número de valores ótimos para tensões e, neste caso, a superfície de suavização é menos oscilatória do que a obtida por interpolação.

Em seguida descreve-se a obtenção da matriz de extrapolação via aproximação mínima quadrática para os elementos quadráticos com seis e oito nós. A referência é:

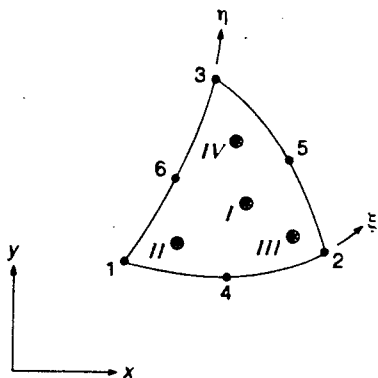
Burnett, D.S., "Finite Element Analysis - From Concepts to Applications", Addison-Wesley, 1987.

No caso de elementos quadráticos a superfície de suavização é definida como um plano (polinômio bidimensional completo do primeiro grau) no espaço paramétrico do elemento:

$$\chi_s(\xi, \eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta$$

que tem três coeficientes a serem determinados pelo procedimento de aproximação mínima quadrática.

Para o elemento com seis nós, as coordenadas paramétricas e os pontos de amostragem ótima de tensões estão mostrados abaixo:



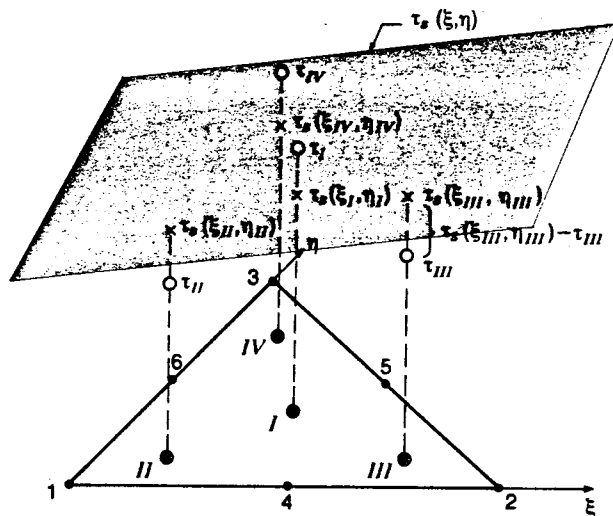
$$\{\tau\}_{\text{nodes}} = [TR]\{\tau\}_{\text{opt}}$$

$$\{\tau\}_{\text{nodes}} = \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad \{\tau\}_{\text{opt}} = \begin{Bmatrix} \tau_I \\ \tau_{II} \\ \tau_{III} \\ \tau_{IV} \end{Bmatrix}$$

A equação de  $\tau_s(\xi, \eta)$  define um plano que não pode em geral coincidir com os valores de tensão nos quatro pontos de Gauss. Seja  $e(c_1, c_2, c_3)$  o erro mínimo quadrático:

$$\begin{aligned} e(c_1, c_2, c_3) &= \sum_{i=1}^{IV} [\tau_s(\xi_i, \eta_i) - \tau_i]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{IV} [c_1 + c_2 \xi_i + c_3 \eta_i - \tau_i]^2 \end{aligned}$$

onde cada termo está ilustrado na figura abaixo:



O erro é minimizado impondo-se as seguintes condições:

$$\frac{\partial e}{\partial c_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial e}{\partial c_1} = 0 : \sum_{i=1}^{IV} [c_1 + c_2 \xi_i + c_3 \eta_i - \tau_i] = 0$$

$$\frac{\partial e}{\partial c_2} = 0 : \sum_{i=1}^{IV} [c_1 + c_2 \xi_i + c_3 \eta_i - \tau_i] \xi_i = 0$$

$$\frac{\partial e}{\partial c_3} = 0 : \sum_{i=1}^{IV} [c_1 + c_2 \xi_i + c_3 \eta_i - \tau_i] \eta_i = 0$$

Estas relações escritas em uma forma matricial ficam:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{IV} 1 & \sum_{i=1}^{IV} \xi_i & \sum_{i=1}^{IV} \eta_i \\ \sum_{i=1}^{IV} \xi_i & \sum_{i=1}^{IV} \xi_i \xi_i & \sum_{i=1}^{IV} \xi_i \eta_i \\ \sum_{i=1}^{IV} \eta_i & \sum_{i=1}^{IV} \xi_i \eta_i & \sum_{i=1}^{IV} \eta_i \eta_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \xi_I & \xi_{II} & \xi_{III} & \xi_{IV} \\ \eta_I & \eta_{II} & \eta_{III} & \eta_{IV} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_I \\ \tau_{II} \\ \tau_{III} \\ \tau_{IV} \end{Bmatrix}$$

$\uparrow$   $[P]$   $\uparrow$   $[Q]$

ou,

$$[P]\{c\} = [Q]\{\tau\}_{opt}$$

Então

$$\{c\} = [S]\{\tau\}_{opt}$$

onde

$$[S] = [P]^{-1}[Q]$$

As coordenadas paramétricas dos pontos de Gauss são:

$$\begin{array}{cccc}
 \xi_I = \frac{1}{3} & \xi_{II} = \frac{1}{5} & \xi_{III} = \frac{3}{5} & \xi_{IV} = \frac{1}{5} \\
 \eta_I = \frac{1}{3} & \eta_{II} = \frac{1}{5} & \eta_{III} = \frac{1}{5} & \eta_{IV} = \frac{3}{5}
 \end{array}$$

Então,

$$[P] = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{31}{75} & \frac{22}{75} \\ 1 & \frac{22}{75} & \frac{31}{75} \end{bmatrix}$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$e \quad [S] = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 23 & -7 & -7 \\ 0 & -30 & 30 & 0 \\ 0 & -30 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

A matriz  $[S]$  define os coeficientes da superfície de sua-  
vização  $\chi_s = c_1 + c_2\xi + c_3\eta$  diretamente a partir dos valores  
de tensão nos pontos de Gauss.

Para se avaliar os valores de tensão nos nós deve-se substituir  
na equação de  $\chi_s$  as coordenadas paramétrica de cada nó:

$$\begin{array}{cccccc} \xi_1 = 0 & \xi_2 = 1 & \xi_3 = 0 & \xi_4 = 1/2 & \xi_5 = 1/2 & \xi_6 = 0 \\ \eta_1 = 0 & \eta_2 = 0 & \eta_3 = 1 & \eta_4 = 0 & \eta_5 = 1/2 & \eta_6 = 1/2 \end{array}$$

Com isto pode-se construir uma matriz de avaliação  $[E]$  relacionan-  
do os valores nodais de tensão com os coeficientes de  $\chi_s$ :

$$\begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

↑  
[E]

$$\{\tau\}_{\text{nodes}} = [E]\{c\}$$

E finalmente, tem-se a partir de  $\{c\} = [S]\{\tau\}_{\text{opt}}$ ,

$$\{\tau\}_{\text{nodes}} = [E][S]\{\tau\}_{\text{opt}}$$

[TR]

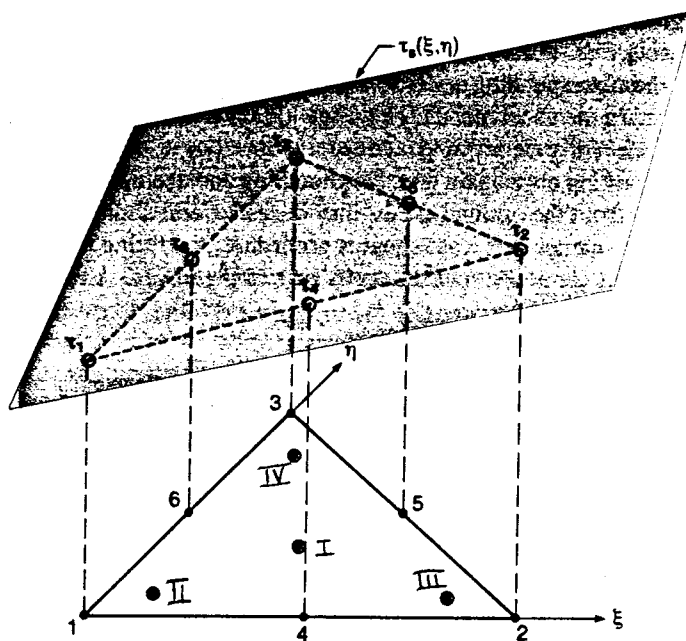


A matriz de extrapolação que obtém os valores nodais em função de valores nos pontos de Gauss é:

$$[TR] = [E][S]$$

$$[TR] = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 23 & -7 & -7 \\ 3 & -7 & 23 & -7 \\ 3 & -7 & -7 & 23 \\ 3 & 8 & 8 & -7 \\ 3 & -7 & 8 & 8 \\ 3 & 8 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\{\chi\}_{nodes} = [TR] \{\chi\}_{opt}$$







## • Suavização global por média de valores nodais

A suavização local de tensões é feita na base de cada elemento em separado. Isto resulta em valores nodais que não são únicos, ou seja, vai haver um valor nodal para cada elemento que contem um determinado nó.

Um procedimento usual é tirar uma média dos valores de tensão de cada nó vindos de cada elemento que o contem. No entanto, há casos em que deve existir uma discontinuidade na tensão, como por exemplo na interface entre dois materiais distintos. Neste caso deve existir um valor médio de tensão em um nó de interface para cada grupo de elementos que são do mesmo material.

Em seguida é descrito um algoritmo para obtenção de valores médios nodais no caso de um único material:

|                                  |  |
|----------------------------------|--|
| Zera $\zeta_i$                   | (inicializa vetor de tensões nodais)                 |
| Zera $m_{ei}$                    | (inicializa vetor de nº de elem. adjacentes aos nós) |
| do {                             | (faça para cada elemento do modelo)                  |
| do {                             | (faça para cada nó do elemento)                      |
| $i = \text{elem-node}(j)$        | (pegue o nó do elemento)                             |
| $\zeta_i = \zeta_i + \zeta_{ej}$ | (some a tensão deste par elemento-nó)                |
| $m_{ei} = m_{ei} + 1$            | (incremente o nº de elementos adjacentes)            |
| }od                              |  |
| }od                              |  |
| $\zeta_i = \zeta_i / m_{ei}$     | (tire a média de cada valor nodal)                   |

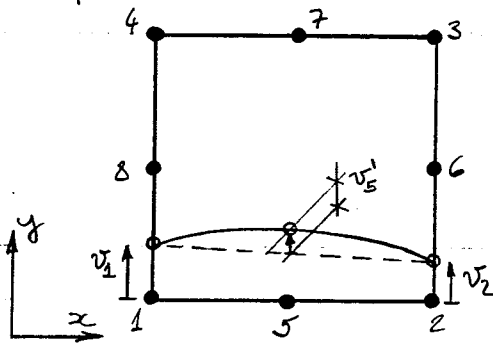
# Degeneração de Elementos Quadriláteros para Triangulares

## Referências

- [IRON74] Irons, B.M., "A Technique for Degenerating Brick-Type Isoparametric Elements using Hierarchical Midside Nodes", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 8, pp. 203-209, 1974.
- [NEWT73] Newton, R.E., "Degeneration of Brick-Type Isoparametric Elements", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 7, pp. 579-581, 1973.
- [COOK81] Cook, R.D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Segunda Edição, John Wiley & Sons, 1981, Seção 7.12, pp. 206-209.
- [BATH82] Bathe, K.-J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, 1982, Seção 5.3.2, pp. 220-227.

## • Introdução

Irons [IRON74] e Cook [COOK81] formulam o problema adotando para os graus de liberdade de meio de lado não os deslocamentos totais mas "desvios" dos deslocamentos obtidos por interpolação linear dos nós dos cantos, conforme mostrado abaixo:



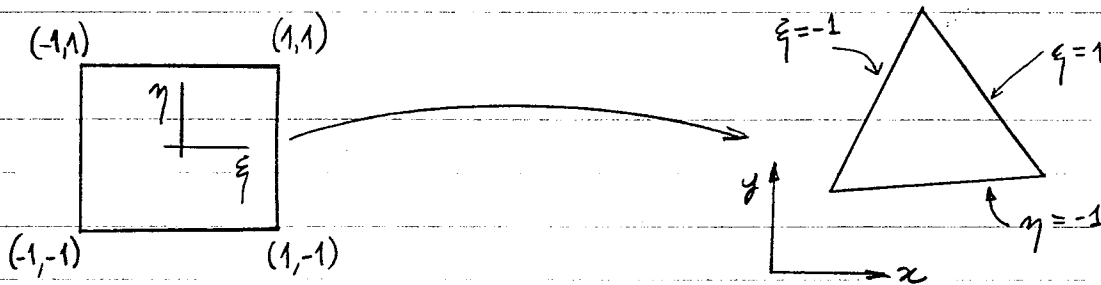
$v_5'$  → g.d.l. "desvio da linearidade" tal que:

$$v_5 = \frac{v_1 + v_2}{2} + v_5'$$

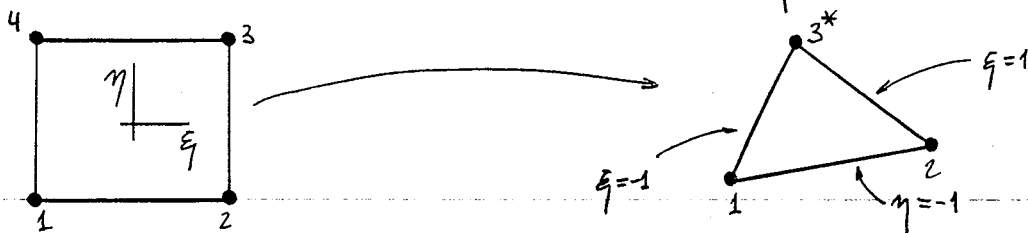
De forma diferente, Newton [NEWT73] usa as funções de forma convencionais (família "Serendipity") na sua formulação, mas os resultados são consistentes com os do enfoque anterior.

• Caso bidimensional

Basicamente, a degeneração de elementos isoparamétricos quadriláteros para triângulos consiste no mapeamento de um espaço quadrado de coordenadas naturais para um espaço real triangular. Na figura abaixo, o lado  $\eta=1$  é colapsado para um vértice. Obviamente, o determinante do Jacobiano desta transformação é nulo para  $\eta=1$ , mas, com a integração numérica, nunca se calcula a inversa do Jacobiano neste ponto.

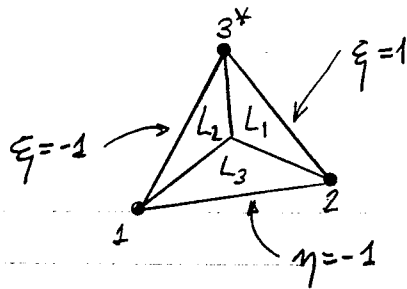


Para elementos lineares, para se obter as funções de forma do elemento triangular a partir das funções de forma do elemento quadrangular, a única modificação a ser feita é somar as duas funções de forma dos nós colapsados:



$$N_3^*(\xi, \eta) = N_3(\xi, \eta) + N_4(\xi, \eta)$$

Pode-se mostrar que no triângulo colapsado mostrado abaixo



$$L_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4};$$

$$L_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4};$$

$$L_3 = \frac{1+\eta}{2}$$

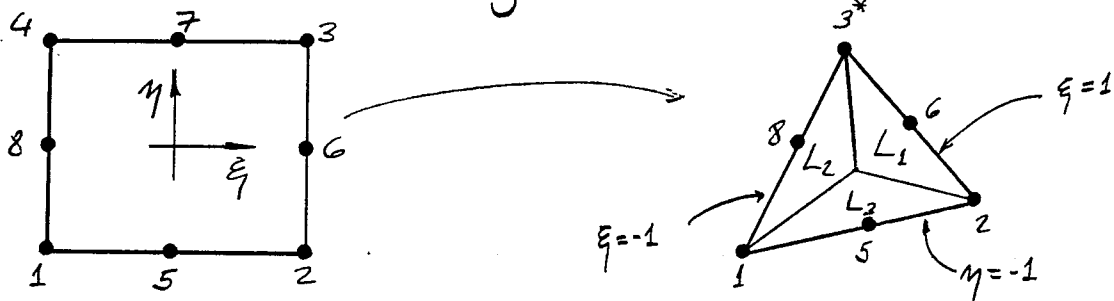
Nota-se que:  $N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} = L_1$

$$N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} = L_2$$

$$N_3^* = N_3 + N_4 = \frac{1+\eta}{2} = L_3$$

Portanto, no caso linear as funções de forma do elemento quadrilátero (Q4) degenerado em um triângulo correspondem exatamente ao elemento CST (T3).

Infelizmente, este não é caso para os elementos quadráticos. Isto é mostrado como se segue.



$$N_3^* = N_3(\xi, \eta) + N_7(\xi, \eta) + N_4(\xi, \eta)$$

Pode ser mostrado que, sem nenhuma modificação, algumas funções de forma do elemento degenerado não correspondem às

funções de forma do elemento LST (TG):

$$\begin{aligned}
 N_3^* &= (2L_3 - 1)L_3 && \equiv N_3 \text{ do LST} \\
 N_6 &= 4L_2L_3 && \equiv N_6 \text{ do LST} \\
 N_8 &= 4L_1L_3 && \equiv N_8 \text{ do LST} \\
 N_1 &= (2L_1 - 1)L_1 && \equiv N_1 \text{ do LST} \\
 N_2 &= (2L_2 - 1)L_2 && \equiv N_2 \text{ do LST} \\
 N_5 &= 4L_1L_2 && \equiv N_5 \text{ do LST}
 \end{aligned}$$

As modificações propostas por Newton [NEWT73] são:

$$\begin{aligned}
 N_1^* &= N_1 + \Delta N \\
 N_2^* &= N_2 + \Delta N \\
 N_5^* &= N_5 - 2\Delta N
 \end{aligned}$$

onde 
$$\Delta N = \frac{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}{8} = \frac{2L_1L_2L_3}{L_1+L_2}$$

de tal forma que,  $\sum N_i = 1$ , e

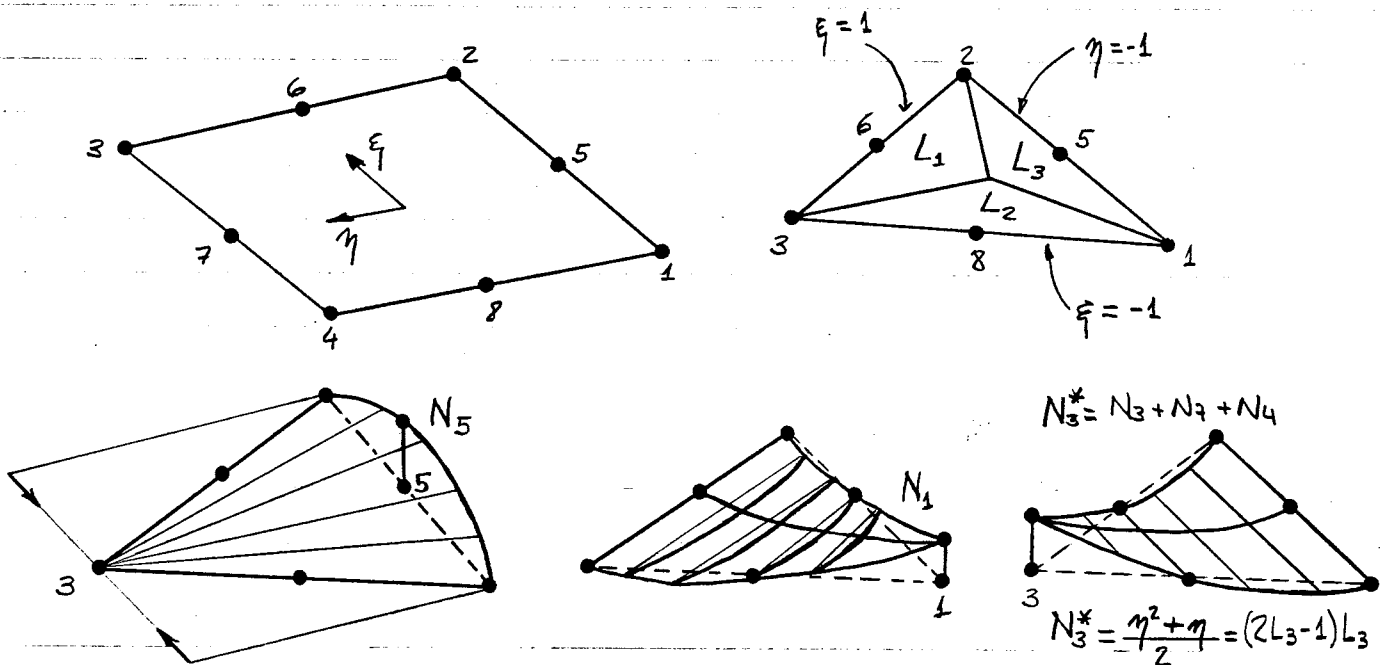
$$\begin{aligned}
 N_1^* &= (2L_1 - 1)L_1 \\
 N_2^* &= (2L_2 - 1)L_2 \\
 N_5^* &= 4L_1L_2
 \end{aligned}$$

Exercício: Considerando que 
$$\begin{cases} L_1 = (1-\xi)(1-\eta)/4 \\ L_2 = (1+\xi)(1-\eta)/4 \\ L_3 = (1+\eta)/2 \end{cases}$$

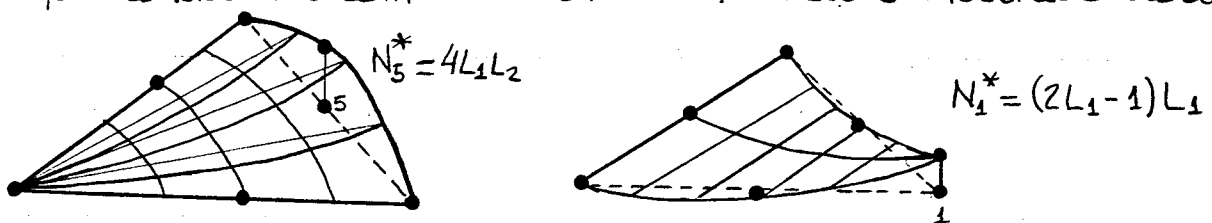
verifique se as funções de forma do elemento quadrilátero com oito nós degenerado ( $N_1^* = N_1 + \Delta N$ ,  $N_2^* = N_2 + \Delta N$ ,  $N_3^* = N_3 + N_4 + N_7$ ,  $N_5^* = N_5 - 2\Delta N$ ,  $N_6^* = N_6$ ,  $N_8^* = N_8$ ) correspondem às funções de forma do elemento LST.



A necessidade das modificações das funções de forma do quadrilátero quadrático degenerado pode também ser vista a partir de um enfoque físico. De acordo com Irons [IRON74] a função de forma do nó de meio de lado oposto ao lado colapsado é singular no vértice colapsado. Isto pode ser visto na figura abaixo para  $N_5$ :



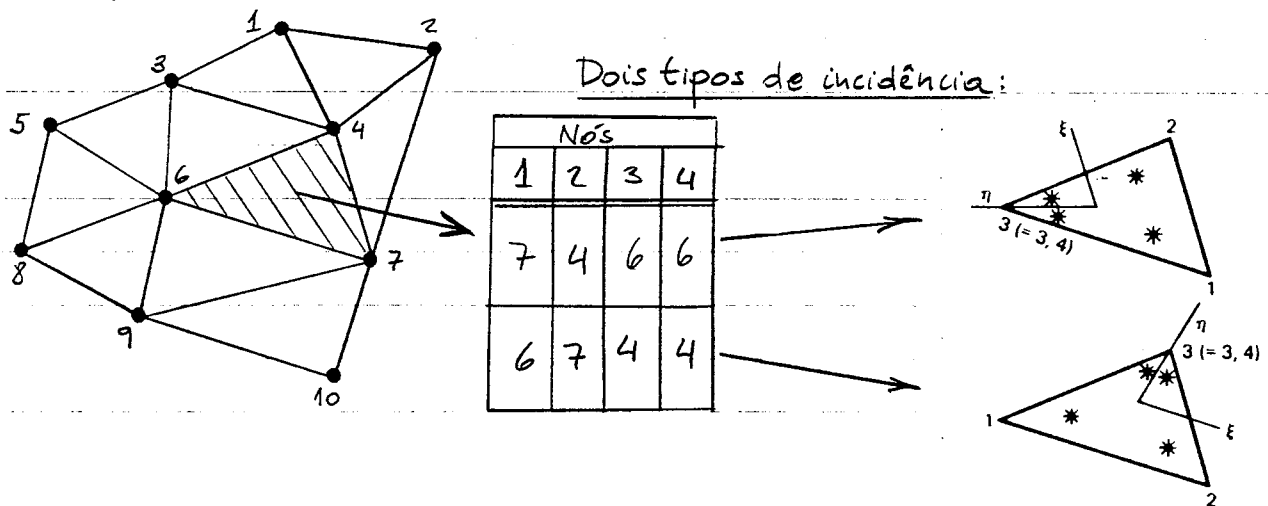
A superfície é reta ao longo de linhas radiais emanando do nó 3, o que acarreta em uma singularidade naquela posição. Também pode ser visto a partir da forma das superfícies  $N_1$  e  $N_3^*$  que  $N_5$  não corresponde ao elemento LST (T6). A superfície correta da função de forma de um nó de canto do LST é uma porção de um cilindro parabólico com geratrizes paralelas ao lado do triângulo oposto ao nó, tal como a superfície de  $N_3^*$ . A correção em  $N_5$  eliminam a singularidade no nó 3. As correções em  $N_5$ ,  $N_1$  (e  $N_2$ ) tornam as funções consistentes com o elemento LST. Isto é mostrado abaixo:



## • Integração numérica

A integração numérica de elementos quadriláteros degenerados é processada como para qualquer elemento quadrilátero. Os valores da coordenadas paramétricas variam também entre  $-1$  e  $1$ . Como nunca existe um ponto de Gauss sobre o nó colapsado, onde a matriz do Jacobiano é singular (determinante nulo), a integração numérica pode ser feita normalmente. Cook [COOK81] sugere que a performance do elemento decai perto do nó colapsado, mas em geral não se observa nenhum problema com estes elementos degenerados.

É interessante observar que as posições dos pontos de Gauss no espaço real cartesiano dependem da numeração da incidência do elemento, tal como mostrado abaixo:

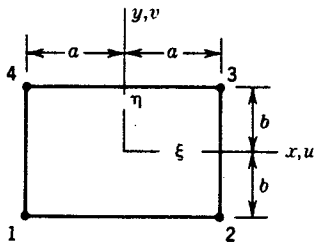


Sob este aspecto o elemento triangular resultante perde a invariância quanto à orientação geométrica quando comparado com a formulação baseada em coordenadas naturais triangulares.

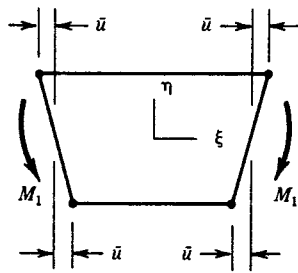
## Elementos Finitos Sub-paramétricos e Incompatíveis (continuidade $C^0$ )

- Motivação: Por que o elemento Q4 é rígido demais no comportamento de flexão?

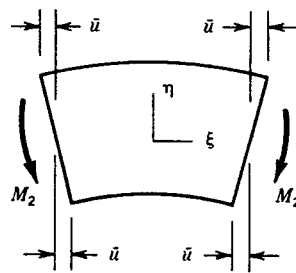
Considere o comportamento à flexão pura:



(a)  
Elemento Bilinear Q4



(b)  
Deformação do Q4 por flexão



(c)  
Deformação correta por flexão

Comportamento correto de flexão:

$$u = \xi \eta \bar{u}$$

$$v = (1 - \xi^2) \frac{a \bar{u}}{2b} + (1 - \eta^2) \frac{\sqrt{3} b \bar{u}}{2a}$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \frac{x}{a} \\ \eta = \frac{y}{b} \end{array} \right\} \Rightarrow \epsilon_x = \eta \frac{\bar{u}}{a} \quad \epsilon_y = -\sqrt{3} \eta \frac{\bar{u}}{a} \quad \gamma_{xy} = 0$$

Comportamento do elemento Q4:

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i$$

$$u = N_1 \bar{u} - N_2 \bar{u} + N_3 \bar{u} - N_4 \bar{u} = \xi \eta \bar{u}$$

$$v = N_1 \cdot 0 + N_2 \cdot 0 + N_3 \cdot 0 + N_4 \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \epsilon_x = \eta \frac{\bar{u}}{a} \quad \checkmark$$

$$\epsilon_y = 0 \quad \times$$

$$\gamma_{xy} = \xi \frac{\bar{u}}{b} = \frac{\bar{u}}{ab} \kappa \longrightarrow \text{cisalhamento espúrio chamado de "parasita"}$$

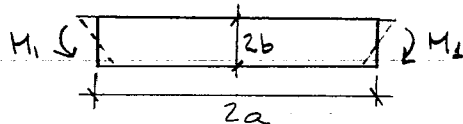
Pode-se mostrar que

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{1+\eta} \left[ \frac{1}{1-\eta} + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right]$$

$$M_1 \rightarrow Q4$$

$$M_2 \rightarrow \text{correto}$$

Para razões  $a/b$  grandes  $M_1 \gg M_2$  e o elemento "bloqueia" devido ao grande cisalhamento que aparece.



O elemento Q4 trabalhando à flexão pura armazena energia de deformação causada por deformação normal pura e por deformação por distorção (cisalhamento) espúria.

• Idéia do elemento incompatível:

"Adicionar modos mais altos de deformação sem adicionar nós no elemento".

No caso do elemento bilinear a idéia seria adicionar modos de deformação que expandam o campo de deslocamentos  $u$  e  $v$  dos termos  $(1-\xi^2)$  e  $(1-\eta^2)$ .

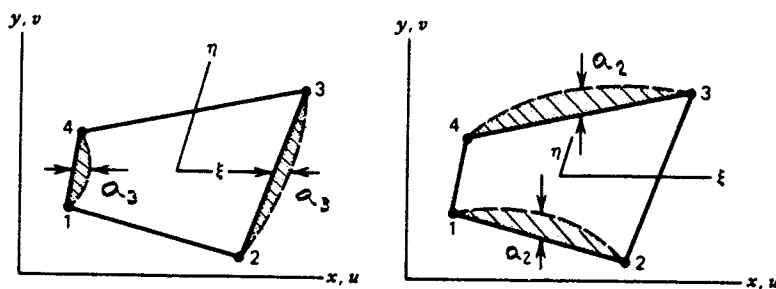
$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i + (1-\xi^2) a_1 + (1-\eta^2) a_3$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i + (1-\xi^2) a_2 + (1-\eta^2) a_4$$

Os coeficientes  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$  são chamados de graus-de-liberdade sem nó, ou não associados a nó ("nodeless d.o.f.").

O elemento assim obtido é chamado de  $Q_6$  por ter seis nós, sendo quatro nós externos e dois nós internos associadas às funções de forma  $(1-\xi^2)$  e  $(1-\eta^2)$ , respectivamente.

O elemento  $Q_6$  é incompatível ou não-conforme porque, por exemplo na figura abaixo, o modo  $u = (1-\eta^2) a_3$  pode ser ativado em um elemento e não ativado em um elemento adjacente.



### • Elementos finitos sub-paramétricos

Os elementos com graus-de-liberdade sem nó, como o elemento incompatível  $Q_6$ , pertencem à classe dos elementos sub-paramétricos pois os graus-de-liberdade adicionais são usados somente para interpolar os deslocamentos e não são usados para o mapeamento da geometria do elemento.

Um outro exemplo é o elemento  $Q_5$ , cujo nó interno adicional está adicionado à função de forma

$$N_5 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2).$$

O elemento resultante é compatível pois esta função de forma (na forma de uma "bolha") é nula ao longo do contorno do elemento.

Neste caso, o mapeamento da geometria do elemento é feito da mesma maneira que o elemento  $Q_4$ , isto é, as funções de mapeamento dos elementos  $Q_5$  e  $Q_6$  para a geometria são:

$$M_1 = N_1$$

$$M_2 = N_2$$

$$M_3 = N_3$$

$$M_4 = N_4$$

De forma semelhante, o elemento quadrático com nove nós  $Q_9$  pode ter uma formulação sub-paramétrica se for considerado a partir do elemento com oito nós  $Q_8$  adicionado de um grau-de-liberdade interno (para interpolar deslocamentos somente) cuja função de forma é a função "bolha":

$$N_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

A interpolação de deslocamentos do elemento resultante é:

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i + N_9 a_1$$

$$v = \sum_{i=1}^8 N_i v_i + N_9 a_2$$

Fisicamente,  $a_1$  e  $a_2$  representam as componentes de deslocamento em  $\xi = \eta = 0$  relativas às componentes de deslocamento  $\sum N_i u_i$  e  $\sum N_i v_i$  em  $\xi = \eta = 0$  provenientes dos graus de liberdade dos oito nós do contorno.

• Condensação: eliminação dos graus de liberdade internos

Condensação é o processo de redução do número de graus de liberdade por substituição. Condensação é uma mera manipulação de coeficientes e não introduz nenhuma aproximação.

A formulação da matriz de rigidez de um elemento sub-paramétrico com graus-de-liberdade internos sem nó é feita com auxílio de condensação como mostrado a seguir, exemplificado pelo elemento Q6.

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i + N_5 a_1 + N_6 a_3$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i + N_5 a_2 + N_6 a_4$$

onde  $N_1, N_2, N_3$  e  $N_4$  são as funções de forma do elemento bilinear Q4, e  $N_5 = (1 - \xi^2)$  e  $N_6 = (1 - \eta^2)$ .

Pode-se escrever

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_r] & [N_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{a\} \end{Bmatrix}$$

↑  
funções de  
forma dos g.d.l.  
reais  $\{d\}$

↑  
funções de  
forma dos g.d.l.  
condensados  $\{a\}$

A matriz de rigidez do elemento considerando todos os g.d.l., condensados ou não, fica particionada como mostrada abaixo:

$$[k]_{(12 \times 12)} = \begin{bmatrix} [k_{rr}]_{(8 \times 8)} & [k_{rc}]_{(8 \times 4)} \\ [k_{cr}]_{(4 \times 8)} & [k_{cc}]_{(4 \times 4)} \end{bmatrix}$$

onde,

$$[k_{rr}]_{(8 \times 8)} = \int_V [B_r]^T [E] [B_r] dV$$

$$[k_{cc}]_{(4 \times 4)} = \int_V [B_c]^T [E] [B_c] dV$$

$$[k_{cr}]_{(4 \times 8)} = [k_{rc}]_{(8 \times 4)}^T = \int_V [B_c]^T [E] [B_r] dV$$

sendo,

$$[B_r] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix}$$

e

$$[B_c] = \begin{bmatrix} N_{5,x} & 0 & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{5,y} & 0 & N_{6,y} \\ N_{5,y} & N_{5,x} & N_{6,y} & N_{6,x} \end{bmatrix}$$

Considere que o sistema de equações  $[k] \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{a\} \end{Bmatrix} = \{r\}$  represente o equilíbrio do elemento isolado, onde  $\{r\}$  é o vetor de forças nodais que equilibram o elemento.



O que se deseja é obter uma matriz  $[\hat{k}]_{(8 \times 8)}$ , tal que,

$$[\hat{k}]\{d\} = \{\hat{r}\}$$

que é obtida a partir da condensação de  $[K]_{(12 \times 12)}$ :

$$\begin{bmatrix} [K_{rr}] & [K_{rc}] \\ [K_{cr}] & [K_{cc}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{a\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{r_r\} \\ \{r_c\} \end{Bmatrix}$$

Para satisfazer o equilíbrio do elemento isolado, o vetor de forças deve corresponder às forças equivalentes nodais provenientes do carregamento atuando no interior do elemento e no seu contorno.

Se as funções de forma dos graus de liberdade internos forem consideradas para o cálculo das forças equivalentes nodais, então  $\{r_c\}$  pode ser diferente de zero. Isto só pode ocorrer se as forças de volume forem não nulas.

Pode-se também, na computação das forças equivalentes nodais, utilizar somente as funções de forma dos nós do contorno. Neste caso sempre se terá  $\{r_c\} = \{0\}$ .

Do segundo grupo de linhas do sistema de equações acima tem-se:

$$[K_{cr}]\{d\} + [K_{cc}]\{a\} = \{r_c\}$$

$$\Rightarrow \{a\} = -[K_{cc}]^{-1}[K_{cr}]\{d\} + [K_{cc}]^{-1}\{r_c\}$$

Substituindo no primeiro grupo de linhas do sistema

$$[k_{rr}]\{d\} + [k_{rc}]\{a\} = \{r_r\}$$

tem-se,

$$\underbrace{[k_{rr}] - [k_{rc}][k_{cc}]^{-1}[k_{cr}]}_{[{\hat{k}}]} \{d\} = \underbrace{\{r_r\} - [k_{rc}][k_{cc}]^{-1}\{r_c\}}_{\{\hat{r}\}}$$

([K] condensada) ({r} condensado)

A matriz  $[{\hat{k}}]$  é a que é utilizada para montar a matriz de rigidez global. As forças equivalentes nodais  $\{\hat{r}\}$  são somadas ao vetor das forças externas globais.

Uma vez resolvido o sistema de equações global tem-se que  $\{d\}$  é conhecido. Pode-se obter  $\{a\}$  por:

$$\{a\} = -[k_{cc}]^{-1}[k_{cr}]\{d\} + [k_{cc}]^{-1}\{r_c\}.$$

As deformações de um ponto qualquer no interior do elemento são obtidas por:

$$\{E\} = [B_r]\{d\} + [B_c]\{a\}.$$

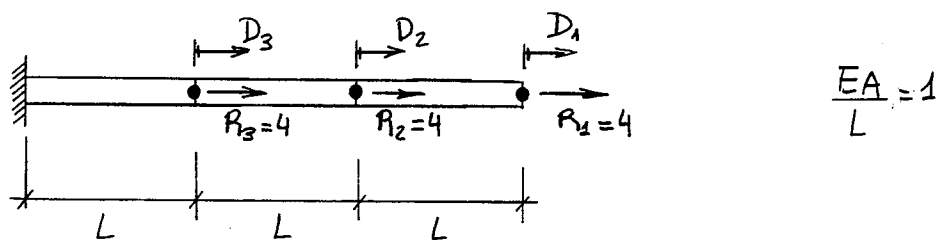
E finalmente chega-se às tensões

$$\{V\} = [E]\{E\}.$$

## • Implementação da condensação

O solução de um sistema de equações por eliminação de Gauss é um processo de redução por substituição como é a condensação. Se o processo de eliminação de Gauss for interrompido antes da redução completa da matriz do sistema de equações, a matriz resultante é a matriz condensada da matriz original, onde as incógnitas eliminadas são as incógnitas condensadas.

Isto é exemplificado para a estrutura abaixo, onde se deseja eliminar a incógnita  $D_3$ , condensando-a em relação à  $D_1$  e  $D_2$ .

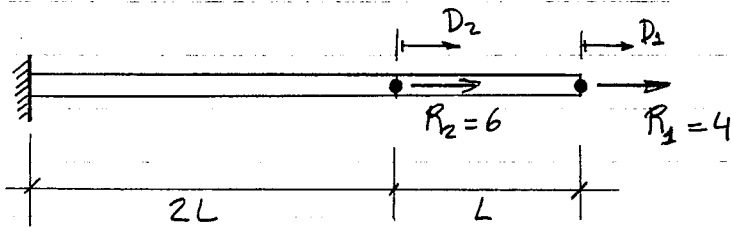


$$[K] \{D\} = \{R\} \longrightarrow \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

A eliminação por Gauss da incógnita  $D_3$  é feita reduzindo-se a terceira coluna da primeira linha até antes da diagonal:

$$(2) \longrightarrow (2) + \frac{1}{2}(3) \implies \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

O sistema de equações mostrado em pontilhado não envolve a incógnita  $D_3$ , isto é,  $D_3$  foi eliminado. A matriz resultante é a matriz de rigidez do sistema abaixo:

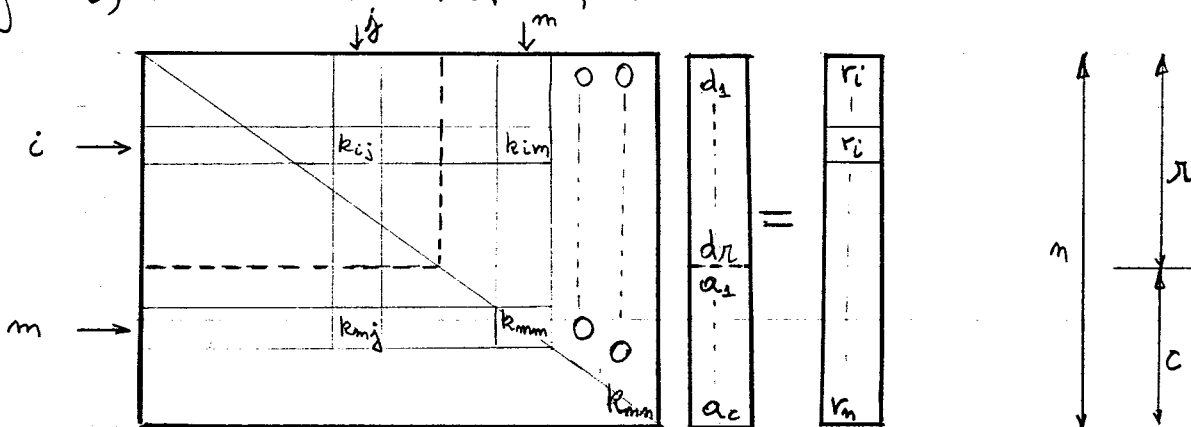


$$K_{22} = \frac{EA}{2L} + \frac{EA}{L} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

A força  $R_2 = 6$  resulta da força original de 4 mais a metade da força original  $R_3 = 4$  ( $R_3$  se divide igualmente entre o engaste e a força em 2).

Isto é, a eliminação de Gauss nada mais é do que a redução (ou condensação) do sistema para um sistema com um número menor de graus de liberdade, colocando as incógnitas eliminadas em função das mantidas.

A partir do exemplo acima pode-se formular um algoritmo genérico para a condensação de uma matriz  $\tilde{k}_{(m \times m)}$  e o correspondente vetor  $\tilde{r}_{(m \times 1)}$ , eliminando os  $c$  últimos graus de liberdade. Para a expressão genérica, considere que as colunas de  $(m+1)$  até  $n$  já foram eliminadas acima da diagonal, sendo  $m = (m-c)+1, \dots, m$ :



A operação para eliminação da  $m$ -ésima coluna acima da diagonal se dá como se segue:

1) Redução do termo genérico  $k_{ij}$  da matriz:

$$k_{ij} = k_{ij} - \frac{k_{im}}{k_{mm}} \times k_{mj} \quad \left. \begin{array}{l} i = 1, \dots, m-1 \\ j = 1, \dots, m \end{array} \right\}$$

Observe que isto resulta em  $k_{im} = 0$  ( $j = m$ ), ou seja,  $k_{im}$  é eliminado.

2) Redução do termo genérico  $r_i$  do vetor  $\underline{r}$ :

$$r_i = r_i - \frac{k_{im}}{k_{mm}} \times r_m$$

O algoritmo pode ser traduzido facilmente para instruções em pseudo-código como é mostrado abaixo:

```
n = n - 1
do (for m = n to m = 2, decreasing m) {
  do (for i = 1 to i = m - 1) {
    do (for j = 1 to j = m) {
      kij = kij -  $\frac{k_{im}}{k_{mm}} \times k_{mj}$ 
    }od
    ri = ri -  $\frac{k_{im}}{k_{mm}} \times r_m$ 
  }od
}od
```

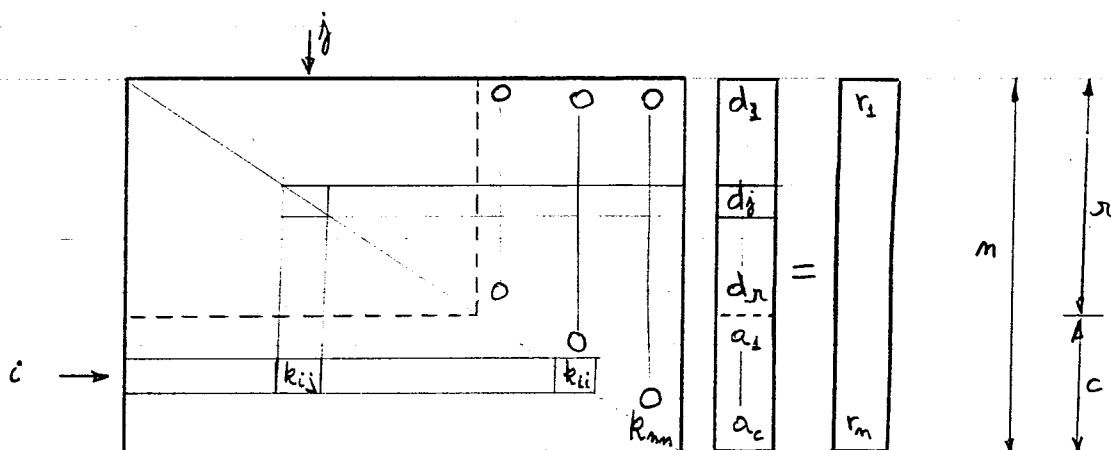
Este código ainda é ineficiente pois não considerou o seguinte:

- 1) A simetria da matriz  $k$
- 2) A divisão  $k_{im}/k_{mm}$  pode ser feita fora do "do" interno e armazenada em uma variável local de forma a reduzir todas as colunas  $j=1, \dots, m$  e o termo  $r_i$  sem precisar efetuar a divisão diversas vezes.

Cook (Cook, R.D. et al.; "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley, 3ª edição) na seção 8.2 mostra o algoritmo com estas modificações em linguagem FORTRAN.

Resta a determinação dos graus de liberdade condensados  $\{a\}$ , uma vez resolvido o sistema de equações global e determinados os graus de liberdade reais  $\{d\}$ .

Isto é implementado pela etapa de retro-substituição do processo de eliminação de Gauss. Abaixo está mostrada a matriz de rigidez do elemento exatamente como fica após a condensação dos  $c$  últimos graus de liberdade:



Considerando que os graus de liberdade condensados  $\{a\}$  ocupam as posições de  $r+1$  até  $n$  do vetor  $\underline{d}$  e que as posições de  $1$  até  $r = n - c$  do vetor  $\underline{d}$  já são conhecidas, a expressão genérica para a retro-substituição é:

$$d_i = \frac{1}{k_{ii}} \left( r_i - \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} d_j \right) \quad \left. \vphantom{d_i} \right\} i = r+1, \dots, n$$

Isto pode ser traduzido em instruções em pseudo-código:

```

r = n - c
do (for i = r+1 to i = n) {
  sum = 0.
  do (for j = 1 to j = i-1) {
    sum += kij dj
  } od
  di = (ri - sum) / kii
} od

```

A partir do conhecimento de todos os graus de liberdade, não-condensados e condensados, determina-se deformações e tensões como foi mostrado anteriormente.

O processo de obtenção dos graus de liberdade mostrado acima pressupõe que a matriz  $\underline{k}$  e o vetor  $\underline{r}$  de um elemento finito são conhecidos na fase de retro-substituição. Como esta fase é distinta da fase de obtenção da matriz  $\underline{k}$  condensada para ser montada na matriz de rigidez global, tem-se duas opções: ou se armazena  $\underline{k}$  e  $\underline{r}$  na fase de condensação, ou os recomputa na fase de retro-substituição.

• Modificação do elemento incompatível Q6

O elemento Q6 (obtido a partir do elemento Q4 com a introdução de quatro graus de liberdade sem nó) passa no teste de "Patch" somente se ele é um retângulo ou um paralelogramo.

Taylor e Wilson (Taylor et. alii, "A Non-Conforming Element for Stress Analysis", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 10, pp. 1211-1219, 1976) propuseram uma modificação no elemento Q6, criando o elemento QM6, que faz com que ele passe no teste mesmo para malhas de formas irregulares.

Para o elemento passar no teste de "Patch" é requerido que os graus de liberdade sem nó  $\{\bar{d}\}$  se anulem para condições de deformação constante ou movimentos de corpo rígido. Nestas condições pode-se escrever as relações de equilíbrio do elemento como:

$$\begin{bmatrix} [k_{rr}] & [k_{rc}] \\ [k_{cr}] & [k_{cc}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{d}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{r_r\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow [k_{cr}] \{\bar{d}\} = \{0\}$ , onde  $\{\bar{d}\}$  é um modo de deformação constante.

Usando  $[k_{cr}] = \int_v [B_c]^T [E] [B_r] dV$ , tem-se:

$$t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underbrace{[B_c]^T [E] [B_r]}_{\{\bar{\sigma}\}} \{\bar{d}\} |J| d\xi d\eta = 0$$

$\{\bar{\sigma}\} \longrightarrow$  tensões constantes devido a  $\{\bar{d}\}$



A pergunta que se faz é: Em que condições

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_c]^T |J| d\xi d\eta = 0 \quad ?$$

Observa-se que se  $|J| = \text{const.}$  (elemento retangular ou paralelogramo) então  $[B_c]$  é linear em  $\xi$  e  $\eta$ , e como o integrando é uma função ímpar a integral se anula.

Considerando que  $N_5 = (1-\xi^2)$  e  $N_6 = (1-\eta^2)$  tem-se:

$$[B_c] = \begin{bmatrix} N_{5,x} & 0 & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{5,y} & 0 & N_{6,y} \\ N_{5,y} & N_{5,x} & N_{6,y} & N_{6,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\xi \cdot \xi_{,x} & 0 & -2\eta \cdot \eta_{,x} & 0 \\ 0 & -2\xi \cdot \xi_{,y} & 0 & -2\eta \cdot \eta_{,y} \\ -2\xi \cdot \xi_{,y} & -2\xi \cdot \xi_{,x} & -2\eta \cdot \eta_{,y} & -2\eta \cdot \eta_{,x} \end{bmatrix}$$

Sabe-se também que  $\begin{Bmatrix} \phi_{,x} \\ \phi_{,y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_{,\xi} \\ \phi_{,\eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{,\xi} \\ \phi_{,\eta} \end{Bmatrix},$

então  $\begin{Bmatrix} \xi_{,x} \\ \xi_{,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{Bmatrix} y_{,\eta} \\ -x_{,\eta} \end{Bmatrix}$  e  $\begin{Bmatrix} \eta_{,x} \\ \eta_{,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{Bmatrix} -y_{,\xi} \\ x_{,\xi} \end{Bmatrix}.$

Portanto,

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_c]^T |J| d\xi d\eta = 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -\xi \cdot y_{,\eta} & 0 & \eta \cdot y_{,\xi} & 0 \\ 0 & \xi \cdot x_{,\eta} & 0 & -\eta \cdot x_{,\xi} \\ \xi \cdot x_{,\eta} & -\xi \cdot y_{,\eta} & -\eta \cdot x_{,\xi} & \eta \cdot y_{,\xi} \end{bmatrix}^T d\xi d\eta$$

O remédio proposto é considerar  $[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \text{constante}$ , pois isto resultará em uma integral nula.

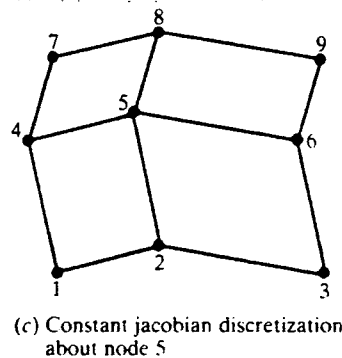
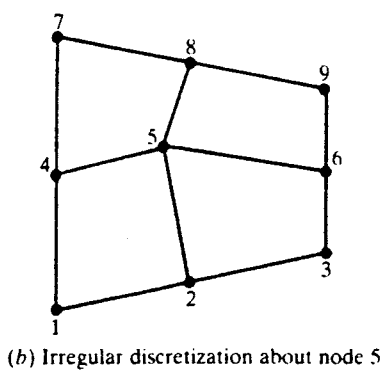
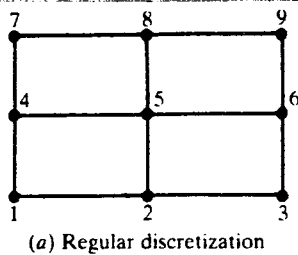
Assim na formação de  $[B_c]$  e na integração dos termos que envol-

vem  $[B_c]$  adota-se  $[J] = [J_0]$  e  $|J| = |J_0|$  sendo  $[J_0]$  e  $|J_0|$  valores constantes que correspondem ao Jacobiano e seu determinante calculados no ponto  $\xi = \eta = 0$ .

Estas modificações só irão alterar a matriz do elemento quando este for irregular (não um paralelogramo). A matriz resultante é diferente, mas o elemento passa no teste de "Patch" para malha irregulares também.

O elemento resultante é consideravelmente mais preciso do que o elemento bilinear  $Q_4$  (veja Cook et. alii, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 3ª edição, seção 8.3).

Cook também observa que o elemento é mais preciso se para o cálculo das forças equivalentes nodais somente as funções de forma compatíveis (dos nós do contorno) forem utilizadas.



## • Modificação do elemento sub-paramétrico Q9

O elemento Lagrangeano com nove nós pode apresentar modos espúrios de deformação quando sub-integrado por uma quadratura de Gauss  $2 \times 2$ . Estes modos podem ser controlados usando uma quadratura  $3 \times 3$ , mas a um custo computacional alto e gerando um elemento que tem um comportamento muito rígido.

Cook (Cook, R.D e Zhao-Hua, F., "Control of Spurious Modes in the Nine-node Quadrilateral Element", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 18, pp. 1576-1580, 1982) propõe dois métodos para controlar modos espúrios do elemento Q9 com formulações sub-paramétrica (mapeamento da geometria considerado como o elemento Q8) que podem ser usados com uma integração  $2 \times 2$ .

### - Método de controle "e"

O método consiste em enrijecer os modos de deformação associados à função de forma de "bolha"  $N_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$ . Isto é feito multiplicando-se os termos da diagonal da matriz de rigidez correspondentes aos graus de liberdade  $a_1$  e  $a_2$  (que ocupam a 17ª e 18ª posições da diagonal de  $[k]$ ) por um fator  $(1+e)$ , onde  $e$  é um número real positivo pequeno, antes da condensação de  $[k]$ .

Fisicamente, esta modificação consiste em adicionar molas de rigidez  $e$  que resistem aos movimentos relativos  $a_1$  e  $a_2$ . Esta modificação não inibe a resposta do elemento para deformações que o elemento Q8 também pode apresentar. Por exemplo, movimentos de corpo rígido conti-

nuam sendo modelados corretamente, e o elemento continua passando no teste de "Patch", mesmo para malhas irregulares.

Cook utilizou  $\epsilon = 0.001$ .

### — Método de controle " $\beta$ "

A matriz de rigidez do elemento Q8,  $[k_8]$ , e a matriz de rigidez do elemento Q9 condensada,  $[k_9]$  são ambas de dimensão  $(16 \times 16)$ . Entretanto, o elemento Q9 com integração reduzida  $2 \times 2$  apresenta modos de deformação espúrios indesejados (compartilhados por elementos adjacentes) que não aparecem para o elemento Q8.

O método consiste em formular uma nova matriz de rigidez  $[k]$  combinando-se  $[k_8]$  e  $[k_9]$ :

$$[k] = \beta [k_8] + (1 - \beta) [k_9],$$

onde  $\beta$  é um número real pequeno entre 0 e 1. Cook utilizou  $\beta = 0.001$ . Com isto, a pequena contribuição do elemento Q8 é bastante para inibir os modos espúrios compartilhados do Q9. O elemento resultante é chamado de Q9C. A formulação pode explorar o fato de que a primeira partição  $(16 \times 16)$  da matriz  $[k_9]$  antes de condensada é exatamente igual à matriz  $[k_8]$  (vide Cook).

Os dois métodos podem ser usados separadamente ou combinados, e sempre o elemento resultante passa no teste de "Patch" para elementos irregulares.