

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio

CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I

Profa. Elisa Sotelino  
Prof. Luiz Fernando Martha

Propriedades de Seções Transversais

## Objetivos

- Definir propriedades geométricas de seções transversais que são importantes para o comportamento à flexão de barras (vigas e pilares).
- Definir **centro de gravidade** ou **centroide** de uma seção transversal.
- Definir **momentos de inércia** de uma seção transversal em relação a eixos que passam pelo centroide.

Motivação: por que a resistência à flexão de uma viga depende da orientação da seção transversal?

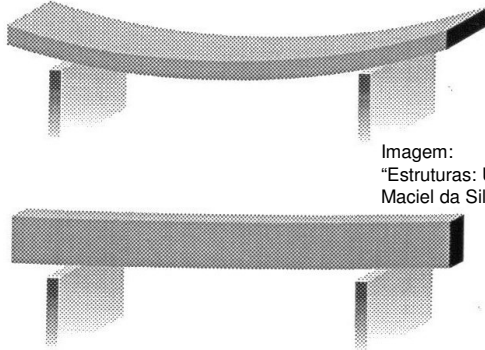


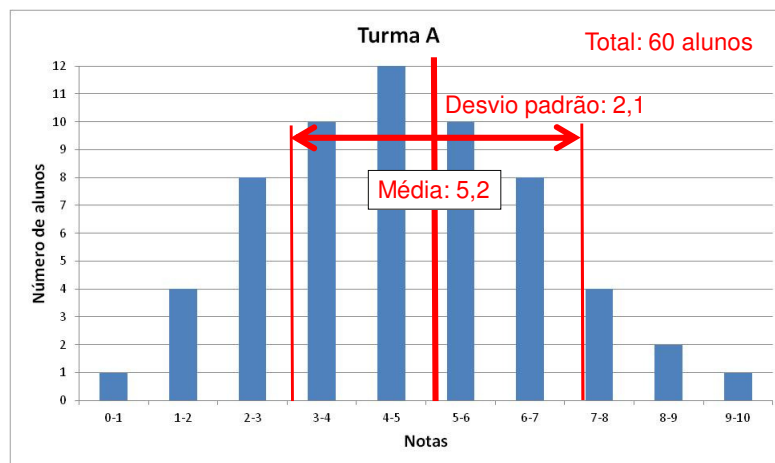
Imagem:  
"Estruturas: Uma Abordagem Arquitetônica"  
Maciel da Silva & Kramer Souto, 2007

Resposta:

- Porque o **momento de inércia** da seção transversal da viga 'em pé' é maior do que o **momento de inércia** da seção transversal da viga deitada; e a resistência à flexão de uma viga está associada ao **momento de inércia** da seção transversal.

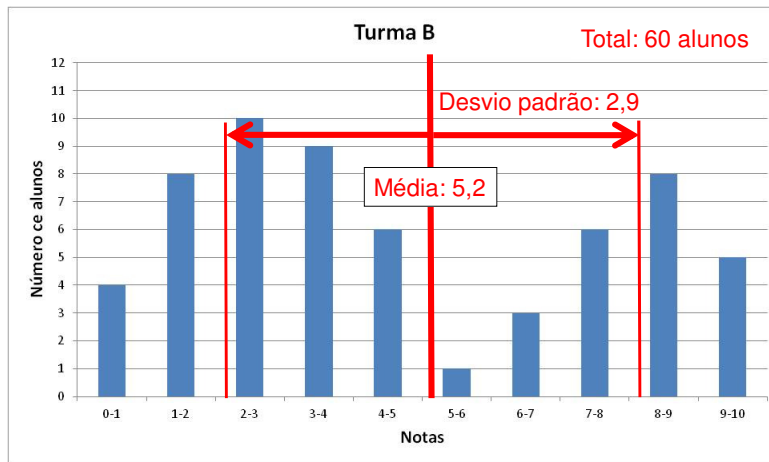
PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais 3

Analogia: histograma de distribuição de notas de alunos  
Distribuição "quase normal"



PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais 4

## Analogia: histograma de distribuição de notas de alunos Distribuição "dispersa"



PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais

5

## Analogia: histograma de distribuição de notas de alunos

### Observações

- A **média** das notas não é suficiente para caracterizar a distribuição das notas de uma turma.
- O **desvio padrão** varia de acordo com a dispersão das notas da turma: quanto mais disperso, maior o valor do desvio padrão.
- Mas o que é o **desvio padrão**?
- O **desvio padrão** é a raiz quadrada da variância.
- Mas o que é a **variância**?

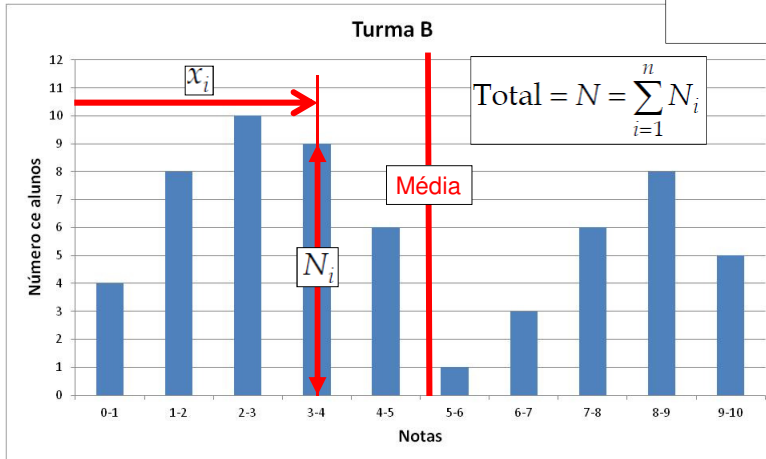
PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais

6

## Analogia: histograma de distribuição de notas de alunos Cálculo da média

$$\text{Média} = x_{\text{med}} = \frac{x_1 \times N_1 + x_2 \times N_2 + \dots + x_n \times N_n}{N_1 + N_2 + \dots + N_n}$$

$$x_{\text{med}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times N_i}{\sum_{i=1}^n N_i}$$



PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais

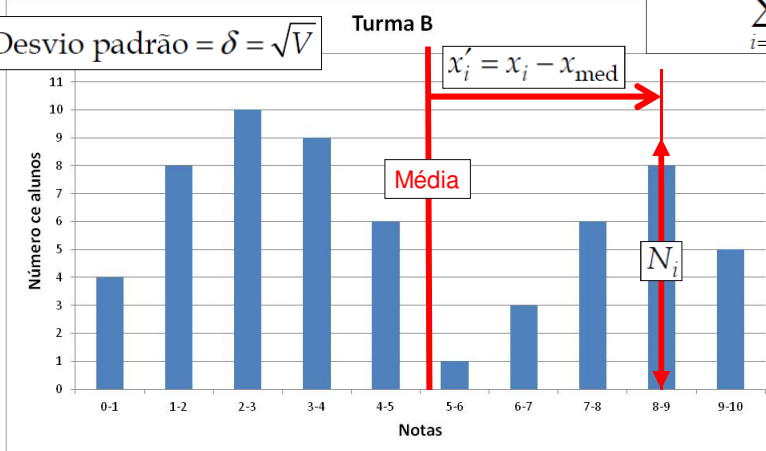
7

## Analogia: histograma de distribuição de notas de alunos Cálculo da variância e do desvio padrão

$$\text{Variância} = V = \frac{(x'_1)^2 \times N_1 + \dots + (x'_n)^2 \times N_n}{N_1 + \dots + N_n}$$

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n (x'_i)^2 \times N_i}{\sum_{i=1}^n N_i}$$

$$\text{Desvio padrão} = \delta = \sqrt{V}$$



PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais

8

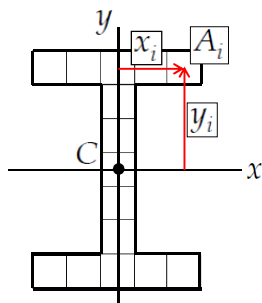
## Correspondência entre propriedades de seções transversais e de histogramas

- **Área** ( $A$ ) de uma seção transversal é análoga ao total  $N$  da população do histograma.
- **Centro de gravidade** ( $CG$ ) ou **centroide** ( $C$ ) de uma seção transversal é análogo à **média** de um histograma.
- **Momento de inércia** de uma seção transversal é análogo à **variância** de um histograma. Na verdade, o momento de inércia é análogo ao somatório do numerador:

$$\sum_{i=1}^n (x'_i)^2 \times N_i$$

## Seção transversal é bidimensional

- Diferença fundamental entre uma seção transversal e um histograma: **seção transversal é bidimensional**.
- Isso acarreta em dois momentos de inércia em relação a eixos que passam pelo centroide da seção:



- Momento de inércia em relação ao eixo  $x$ :

$$I_x = \sum (y_i)^2 \times A_i$$

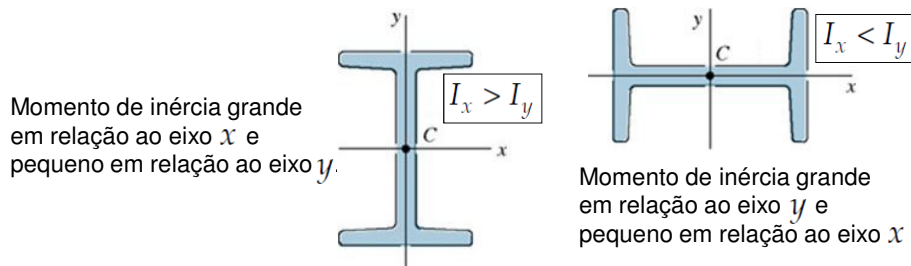
- Momento de inércia em relação ao eixo  $y$ :

$$I_y = \sum (x_i)^2 \times A_i$$

Unidades de momento de inércia: comprimento à quarta potência.

$$\left\{ \begin{array}{l} I \text{ (mm}^4\text{)} \\ I \text{ (cm}^4\text{)} \\ I \text{ (m}^4\text{)} \end{array} \right.$$

Momentos de inércia quantificam o “afastamento” de pontos da seção em relação aos eixos que passam pelo centroide



- A forma de uma seção transversal não é caracterizada apenas pelo centroide e pela área.
- Assim como a variância caracteriza a dispersão de um histograma, os momentos de inércia caracterizam a dispersão de pontos de uma seção transversal.

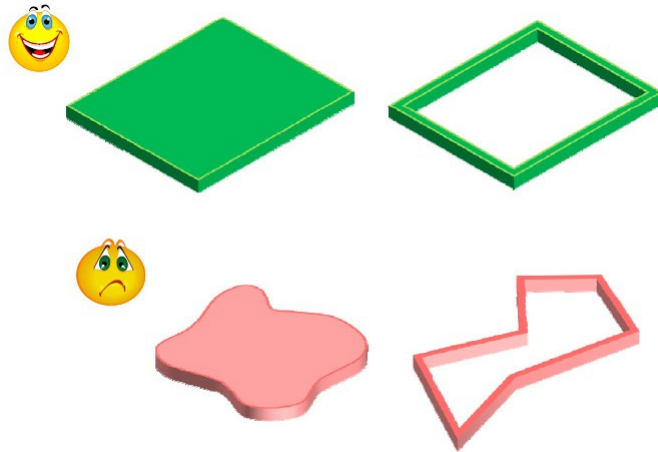
### Seção transversal é contínua

- Outra diferença fundamental entre uma seção transversal e um histograma: **seção transversal é contínua**. O histograma é discreto porque seus valores são fixos (por exemplo, de 0,5 em 0,5 ou de 1,0 em 1,0).
- O cálculo dos somatórios dos momentos de inércia para valores contínuos é feito no limite quando a área de cada elemento tende a zero. Para fazer isso, é necessário um tratamento do *Cálculo Diferencial e Integral*. Isso não vai ser feito aqui. Basta mencionar que os somatórios são substituídos por *integrais*:

$$I_x = \lim_{A_i \rightarrow 0} \left[ \sum (y_i)^2 \times A_i \right] \rightarrow I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \lim_{A_i \rightarrow 0} \left[ \sum (x_i)^2 \times A_i \right] \rightarrow I_y = \int x^2 dA$$

## Localização de centroides



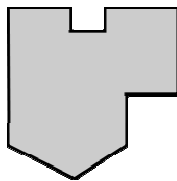
Fonte: Prof. André Maués Brabo Pereira – Universidade Federal Fluminense (UFF) – Departamento de Engenharia Civil – Mecânica de Corpos Rígidos

PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais 13

## Localização de centroides

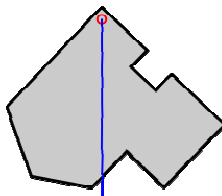
### Localização do centroide de uma forma física bidimensional arbitrária:

#### Passo 1



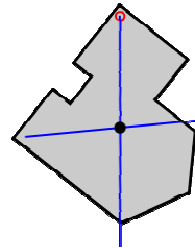
Reproduzir a forma 2D arbitrária.

#### Passo 2



Suspender a forma em um ponto próximo de um dos cantos. Soltar um prumo e marcar a linha no objeto.

#### Passo 3



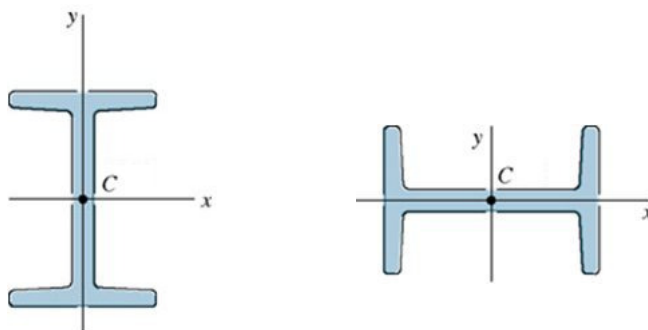
Suspender a forma em um outro ponto não tão próximo do primeiro. Soltar novamente um prumo e fazer a marcação. A interseção das duas linhas é o centroide.

Fonte: Prof. André Maués Brabo Pereira – Universidade Federal Fluminense (UFF) – Departamento de Engenharia Civil – Mecânica de Corpos Rígidos

PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais 14

## Simetria

**Quando existe eixo de simetria nas formas geométricas, o centróide ficará sobre esse eixo, e quando existem dois eixos de simetria o centróide se localizará na interseção desses eixos.**



Fonte: Prof. André Maués Brabo Pereira – Universidade Federal Fluminense (UFF) – Departamento de Engenharia Civil – Mecânica de Corpos Rígidos

PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais 15

## Centroides de formas primitivas

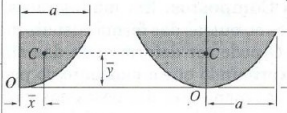
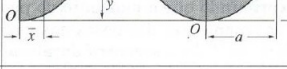
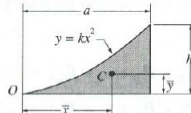
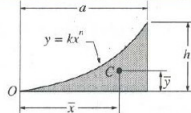
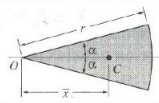
Forma de Superfície		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Triângulo			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarto de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicírculo		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um quarto de elipse		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Limitada por um segmento de reta e uma semi-elipse		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$

Fonte: Prof. André Maués Brabo Pereira – Universidade Federal Fluminense (UFF) – Departamento de Engenharia Civil – Mecânica de Corpos Rígidos

PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais 16



## Centroides de formas primitivas

Forma de Superfície	$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área	
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e uma semiparábola		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Limitada por um segmento de reta e uma parábola		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um arco de parábola do 2º grau.		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um arco de parábola do grau n.		$\frac{n+1}{n+2} a$	$\frac{n+1}{4n+2} h$	$\frac{ah}{n+1}$
Setor circular		$\frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	0	$\omega r^2$

Fonte: Prof. André Maués Brabo Pereira – Universidade Federal Fluminense (UFF) – Departamento de Engenharia Civil – Mecânica de Corpos Rígidos

PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais 17

## Centroides de formas compostas

Quando se estiver interessado na determinação de propriedades integrais (área e momentos de primeira ordem) de formas geométricas que não estão tabeladas, mas identifica-se que a forma em questão é composta de formas elementares (primitivas) cujas propriedades integrais são conhecidas, aplica-se essa composição na avaliação das propriedades integrais da forma composta:

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{\sum Q_{yi}}{\sum A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{\sum Q_{xi}}{\sum A_i}$$

$\bar{x}, \bar{y}$  Coordenadas do centroide (C) da forma composta;

$\tilde{x}_i, \tilde{y}_i$  Coordenadas do centroide de cada uma das formas primitivas; e

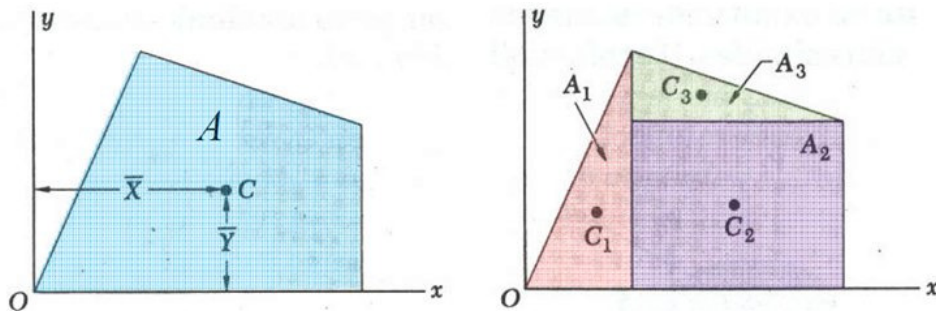
$\sum A_i$  Soma resultante das áreas das formas primitivas que constituem a forma composta.

$$Q_{yi} = \tilde{x}_i A_i \longleftarrow \text{Momentos de primeira ordem das formas primitivas.} \longrightarrow Q_{xi} = \tilde{y}_i A_i$$

Fonte: Prof. André Maués Brabo Pereira – Universidade Federal Fluminense (UFF) – Departamento de Engenharia Civil – Mecânica de Corpos Rígidos

PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais 18

## Centroides de formas compostas



$$A = A_{R_1} + A_{R_2} + A_{R_3}$$

$$Q_x = Q_{xR_1} + Q_{xR_2} + Q_{xR_3} \Rightarrow \bar{Y} = \frac{Q_x}{A}$$

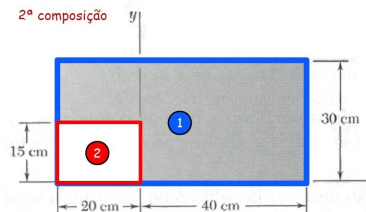
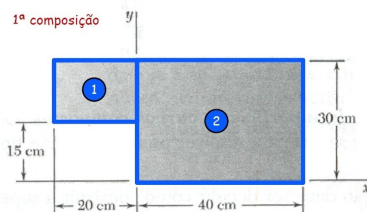
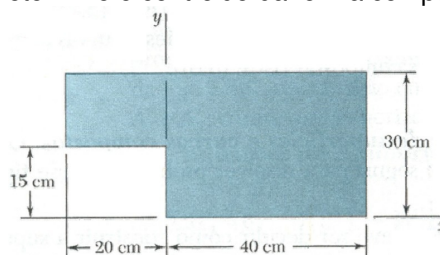
$$Q_y = Q_{yR_1} + Q_{yR_2} + Q_{yR_3} \Rightarrow \bar{X} = \frac{Q_y}{A}$$

Fonte: Prof. André Maués Brabo Pereira – Universidade Federal Fluminense (UFF) – Departamento de Engenharia Civil – Mecânica de Corpos Rígidos

PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais 19

## Centroides de formas compostas

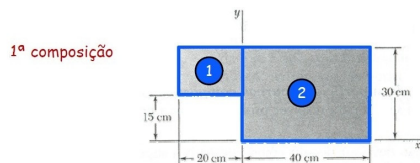
**Exemplo:** Determine o centróide da forma composta.



Fonte: Prof. André Maués Brabo Pereira – Universidade Federal Fluminense (UFF) – Departamento de Engenharia Civil – Mecânica de Corpos Rígidos

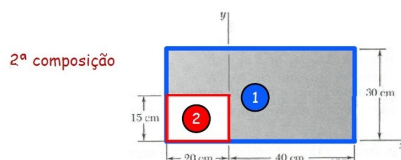
PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais 20

## Centroides de formas compostas



Região	$A_i$ (cm <sup>2</sup> )	$\bar{x}_i$ (cm)	$\bar{y}_i$ (cm)	$Q_{x_i}$ (cm <sup>3</sup> )	$Q_{y_i}$ (cm <sup>3</sup> )
1	300	-10	22,5	6750	-3000
2	1200	20	15	18000	24000
Total	1500	-	-	24750	21000

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{21000}{1500} = 14 \text{ cm} \quad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{24750}{1500} = 16,5 \text{ cm}$$



Região	$A_i$ (cm <sup>2</sup> )	$\bar{x}_i$ (cm)	$\bar{y}_i$ (cm)	$Q_{x_i}$ (cm <sup>3</sup> )	$Q_{y_i}$ (cm <sup>3</sup> )
1	1800	10	15	27000	18000
2	-300	-10	7,5	-2250	3000
Total	1500	-	-	24750	21000

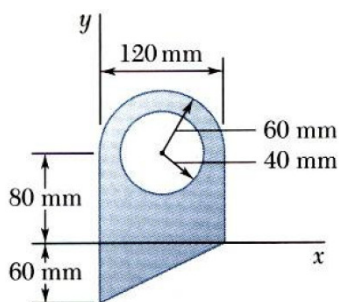
$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{21000}{1500} = 14 \text{ cm} \quad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{24750}{1500} = 16,5 \text{ cm}$$

Fonte: Prof. André Maués Brabo Pereira – Universidade Federal Fluminense (UFF) – Departamento de Engenharia Civil – Mecânica de Corpos Rígidos

PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais 21

## Centroides de formas compostas

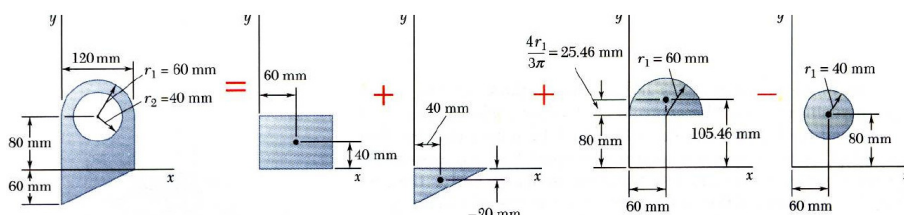
**Exemplo:** Para a placa mostrada, determine os momentos de primeira ordem segundo  $x$  e  $y$  e a localização do centroide.



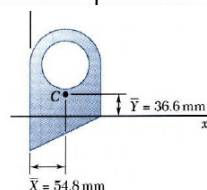
Fonte: Prof. André Maués Brabo Pereira – Universidade Federal Fluminense (UFF) – Departamento de Engenharia Civil – Mecânica de Corpos Rígidos

PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais 22

## Centroides de formas compostas



Component	A, mm <sup>2</sup>	$\bar{x}$ , mm	$\bar{y}$ , mm	$\bar{x}A$ , mm <sup>3</sup>	$\bar{y}A$ , mm <sup>3</sup>
Rectangle	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triangle	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	-20	$+144 \times 10^3$	$-72 \times 10^3$
Semicircle	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Circle	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	$-301.6 \times 10^3$	$-402.2 \times 10^3$
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma \bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma \bar{y}A = +506.2 \times 10^3$



$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{+757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3}{13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2}$$

$$\bar{X} = 54.8 \text{ mm}$$

$$Q_x = +506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$Q_y = +757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{+506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3}{13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2}$$

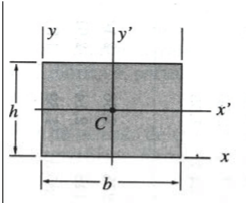
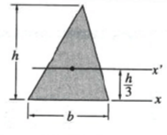
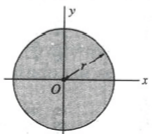
$$\bar{Y} = 36.6 \text{ mm}$$

Fonte: Prof. André Maués Brabo Pereira – Universidade Federal Fluminense (UFF) – Departamento de Engenharia Civil – Mecânica de Corpos Rígidos

## Teste

- Localização do centroide de uma forma composta.

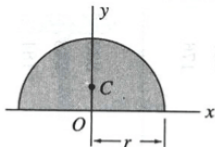
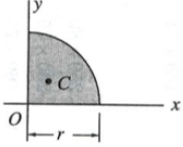
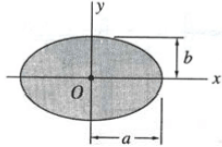
## Momentos de inércia de formas primitivas

Retângulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$
Triângulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Círculo		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$

Fonte: Prof. André Maués Brabo Pereira – Universidade Federal Fluminense (UFF) – Departamento de Engenharia Civil – Mecânica de Corpos Rígidos

PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais 25

## Momentos de inércia de formas primitivas

Semicírculo		$I_x = \bar{I}_y = \frac{1}{8}\pi r^4$
Quadrante		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$
Elipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$

Fonte: Prof. André Maués Brabo Pereira – Universidade Federal Fluminense (UFF) – Departamento de Engenharia Civil – Mecânica de Corpos Rígidos

PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais 26

## Tabelas de propriedades geométricas de seções

Forma	Dimensão nominal, mm	Peso / m, N/m	Área, cm <sup>2</sup>	$\bar{I}_x$ , cm <sup>4</sup>	$\bar{k}_x$ , cm	$\bar{y}$ , cm	$\bar{I}_y$ , cm <sup>4</sup>	$\bar{k}_y$ , cm	$\bar{x}$ , cm
Perfil I	220 × 220	718	93,3	8 105	9,30	...	2 929	5,60	
	180 × 180	529	67,5	3 856	7,56	...	1 410	4,56	
	140 × 140	350	45,5	1 534	5,80	...	572	3,55	
Perfil duplo T	380 × 149	824	107	24 010	15	...	975	3,02	
	300 × 125	531	69,1	9 800	11,9	...	451	2,56	
	160 × 74	176	22,8	935	6,40	...	54,7	1,55	
Perfil U	250 × 80	333	42,5	3 770	9,40	...	238	2,36	2,14
	200 × 75	248	32,2	1 910	7,70	...	148	2,14	2,01
	160 × 75	184	24	925	6,21	...	85,3	1,89	1,84
Perfil angular	100 × 70 × 10*	125	16,2	156	3,10	3,28	66,3	2,00	1,85
	60 × 60 × 10	85	11,07	34,9	1,78	1,85	34,9	1,78	1,85
	80 × 60 × 10	108	13,00	80,8	2,49	2,65	38,8	1,73	1,65
	100 × 100 × 12	175	22,7	207	3,02	2,90	207	3,02	2,90

\* O último número representa a espessura.

Fonte: Prof. André Maués Brabo Pereira – Universidade Federal Fluminense (UFF) – Departamento de Engenharia Civil – Mecânica de Corpos Rígidos

PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Marthá – Propriedades de Seções Transversais 27

## Tabelas de propriedades geométricas de seções

Designação	Massa (kg/m)	Área (mm <sup>2</sup> )	Altura (mm)	Mesa		Espessura da alma (mm)	Eixo X-X			Eixo Y-Y				
				Largura (mm)	Espessura (mm)		I (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	Z (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	r (mm)	I (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	Z (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	r (mm)	x (mm)	
Perfis C	C457 × 86	86,3	10960	457,2	106,7	15,9	17,8	279,2	1221	160	7,70	91	26,5	22,4
	× 77	77,2	9790	457,2	104,1	15,9	15,2	258,9	1133	163	7,12	87	27,0	22,1
	× 68	68,2	8630	457,2	101,6	15,9	12,7	238,7	1044	166	6,58	83	27,6	22,6
	× 64	64,5	8050	457,2	100,3	15,9	11,4	228,6	1000	169	6,24	81	27,8	22,9
	C381 × 74	74,4	9450	381,0	94,4	16,5	18,2	167,1	877	133	4,66	63	22,2	20,3
	× 60	59,5	7550	381,0	89,4	16,5	13,2	144,1	756	138	3,87	56	22,6	19,8
	× 50	50,5	6390	381,0	86,4	16,5	10,2	130,1	683	143	3,41	51	23,1	20,1
	C305 × 45	44,6	5670	304,8	80,5	12,7	13,0	67,10	440	109	2,16	34	19,5	17,3
	× 31	30,8	3890	304,8	74,7	12,7	7,1	53,32	350	117	1,62	28	20,4	17,8
	C254 × 45	44,6	5680	254,0	77,0	11,1	17,1	42,87	338	86,9	1,66	27	17,1	16,5
	× 37	37,2	4730	254,0	73,3	11,1	13,4	37,75	297	89,3	1,42	25	17,3	15,7
	× 23	22,8	2880	254,0	66,0	11,1	6,1	27,85	219	98,3	0,96	19	18,3	16,3
C229 × 30	29,8	3780	228,6	67,3	10,5	11,4	25,22	221	81,7	1,00	19	16,3	15,0	
× 22	22,3	2830	228,6	63,1	10,5	7,2	21,10	185	86,3	0,79	16,4	16,7	15,0	
× 20	19,9	2510	228,6	61,7	10,5	5,8	19,69	172	88,6	0,75	16,2	17,3	15,5	
C203 × 28	27,9	3540	203,2	64,2	9,9	12,4	18,19	179	71,7	0,83	17	15,3	14,5	
× 20	20,5	2590	203,2	59,5	9,9	7,7	14,90	147	75,8	0,62	13,7	15,5	14,2	
× 17	17,1	2170	203,2	57,4	9,9	5,6	13,44	132	78,7	0,54	12,6	15,8	14,7	
C178 × 22	22,0	2790	177,8	58,4	9,3	10,6	11,28	127	63,6	0,58	12,9	14,4	13,5	
× 18	18,2	2310	177,8	55,7	9,3	8,0	10,03	113	65,9	0,50	11,8	14,7	13,5	
× 15	14,6	1840	177,8	53,1	9,3	5,3	8,78	99	69,1	0,408	10,4	14,9	14,0	
C152 × 19	19,4	2460	152,4	54,8	8,7	11,1	7,20	94	54,1	0,46	11,1	13,7	13,2	
× 16	15,6	1980	152,4	51,7	8,7	8,0	6,29	83	56,4	0,362	9,5	13,5	12,7	
× 12	12,2	1560	152,4	48,8	8,7	5,1	5,41	71	59,3	0,291	8,2	13,7	13,2	
C127 × 13	13,4	1700	127,0	47,9	8,1	8,3	3,66	58	46,4	0,266	7,5	12,5	12,2	
× 10	10,0	1260	127,0	44,5	8,1	4,8	3,08	49	49,4	0,200	6,2	12,6	12,4	
C102 × 11	10,8	1370	101,6	43,7	7,5	8,1	1,87	37	36,9	0,183	5,7	11,6	11,7	
× 8	8,0	1010	101,6	40,1	7,5	4,6	1,58	31	39,6	0,133	4,7	11,5	11,7	
C76 × 9	8,9	1130	76,2	40,5	6,9	9,0	0,87	23	27,7	0,129	4,5	10,7	11,7	
× 6	6,1	770	76,2	35,8	6,9	4,3	0,67	18	29,5	0,082	3,4	10,4	11,2	

Publicado por cortesia de:  
© The American Institute of Steel Construction  
"Adaptado ao SI de unidades"

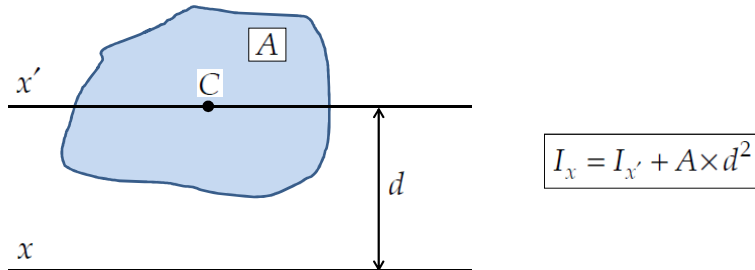
$$I_x = 67,10 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Fonte: Prof. André Maués Brabo Pereira – Universidade Federal Fluminense (UFF) – Departamento de Engenharia Civil – Mecânica de Corpos Rígidos

PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Marthá – Propriedades de Seções Transversais 28

## Momento de inércia de formas compostas

Teorema dos Eixos Paralelos (Teorema de Steiner):



- O momento de inércia de uma forma em relação a um eixo  $x$  é igual ao momento de inércia da forma em relação a um eixo paralelo  $x'$  que passa pelo centroide  $C$  da forma acrescido do produto do quadrado da distância  $d$  entre os eixos  $x$  e  $x'$  pela área  $A$  da forma.

PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais 29

## Momento de inércia de formas compostas

- Uma forma composta é constituída por uma série de outras formas geométricas mais simples (primitivas), como retângulo, triângulos ou semicírculos.
- Os momentos de inércia da forma composta em relação a um eixo comum podem ser determinados utilizando o Teorema dos Eixos Paralelos, desde que se conheça as distâncias dos centroides das formas primitivas a esse eixo comum e os momentos de inércia das formas primitivas em relação aos seus centroides.

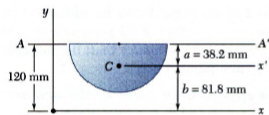
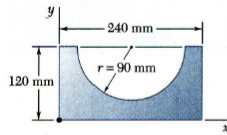
PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais 30



## Momento de inércia de formas compostas

### // Exemplo

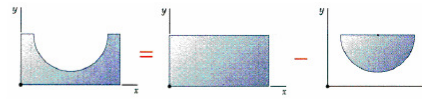
Determine o momento de inércia segundo o eixo  $x$ .



$$a = \frac{4r}{3\pi} = \frac{(4)(90)}{3\pi} = 38.2 \text{ mm}$$

$$b = 120 - a = 81.8 \text{ mm}$$

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(90)^2 = 12.72 \times 10^3 \text{ mm}^2$$



Retângulo

$$I_r = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{1}{3}(240)(120) = 138.2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Semi-círculo: Momento de inércia segundo  $AA'$ ,

$$I_{AA'} = \frac{1}{8}\pi r^4 = \frac{1}{8}\pi(90)^4 = 25.76 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Momento de inércia segundo  $x'$ ,

$$\bar{I}_{x'} = I_{AA'} - Aa^2 = (25.76 \times 10^6) - (12.72 \times 10^3) = 7.20 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Momento de inércia segundo  $x$ ,

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ab^2 = 7.20 \times 10^6 + (12.72 \times 10^3)(81.8)^2 = 92.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

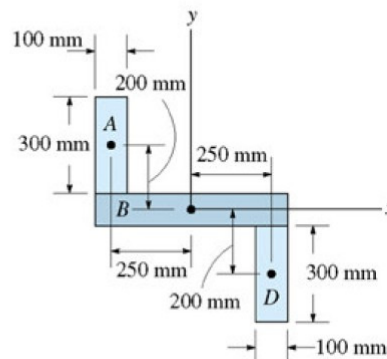
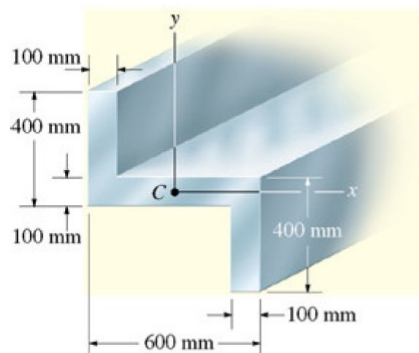
$$I_{x \text{ total}} = I_r - I_x = 45.9 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Fonte: Prof. André Maués Brabo Pereira – Universidade Federal Fluminense (UFF) – Departamento de Engenharia Civil – Mecânica de Corpos Rígidos

PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais 31

## Momento de inércia de formas compostas

**Exercício:** Determine os momentos de inércia da área da seção reta da viga mostrada na figura, em relação aos eixos  $x$  e  $y$  que passam pelo seu centroide.



Fonte: Prof. André Maués Brabo Pereira – Universidade Federal Fluminense (UFF) – Departamento de Engenharia Civil – Mecânica de Corpos Rígidos

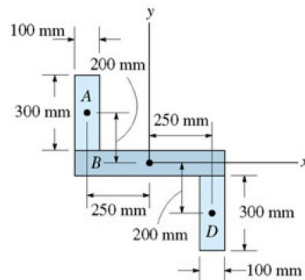
PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais 32



## Momento de inércia de formas compostas

**Exercício:** Determine os momentos de inércia da área da seção reta da viga mostrada na figura, em relação aos eixos  $x$  e  $y$  que passam pelo seu centroide.

	$\bar{I}_x$	$\bar{I}_y$	$d_x$	$d_y$	$A$	$I_x$	$I_y$
A	$225 \times 10^6$	$25 \times 10^6$	-250	200	30000	$1425 \times 10^6$	$1900 \times 10^6$
D	$225 \times 10^6$	$25 \times 10^6$	250	-200	30000	$1425 \times 10^6$	$1900 \times 10^6$
B	$50 \times 10^6$	$1800 \times 10^6$	0	0	60000	$50 \times 10^6$	$1800 \times 10^6$
Seção completa					120000	$2900 \times 10^6$	$5600 \times 10^6$



Unidades:

$d$  (mm)

$A$  (mm<sup>2</sup>)

$I$  (mm<sup>4</sup>)

Fonte: Prof. André Maués Brabo Pereira – Universidade Federal Fluminense (UFF) – Departamento de Engenharia Civil – Mecânica de Corpos Rígidos  
PUC-Rio – CIV 1111 – Sistemas Estruturais na Arquitetura I – Elisa Sotelino e Luiz Fernando Martha – Propriedades de Seções Transversais 33

## Teste

- Cálculo dos momentos de inércia de uma forma composta em relação aos eixos que passam pelo centroide.