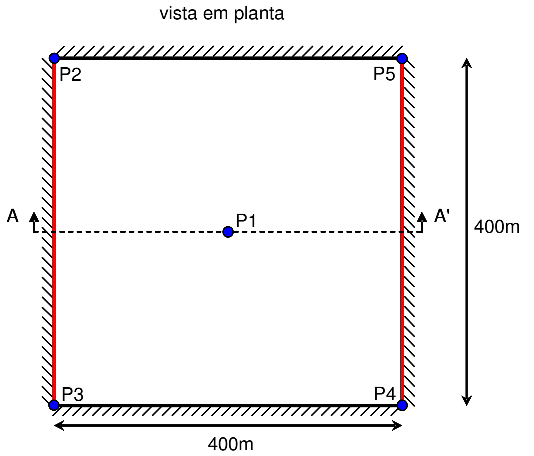
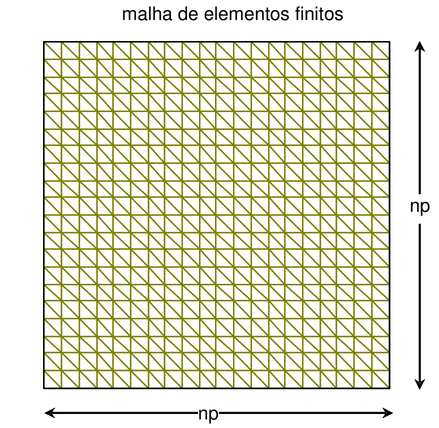
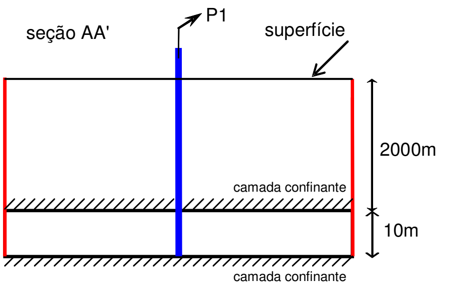
CIV 2552 – Mét. Num. Prob. de Fluxo e Transporte em Meios Porosos
1º Semestre – 2010

Trab4: Método dos Elementos Finitos
Fluxo 2D em regime transiente em reservatório de óleo

Simular o comportamento transiente da distribuição de pressão no reservatório mostrado abaixo ao longo de 10 anos. A figura mostra um reservatório com 10 m de espessura a 2000 m de profundidade. P1 a P5 são poços. P1 é um poço de produção. P2 a P5 são poços de injeção. O modelo de elementos finitos tem uma malha estruturada (uniforme) com elementos finitos triangulares lineares.







np: número de pontos nodais em cada direção
(np é um número impar)

Condições iniciais e parâmetros pertinentes:

Pressão inicial: $p_0 = 20$ MPa

Permeabilidade intrínseca:

$K = 300\ \text{md} = 3\times10^{-13}\ \text{m}^2$ (md → mili-darcis)

Viscosidade dinâmica:

$\mu = 0.04\ \text{p} = 4\times10^{-8}\ \text{MPa}\cdot\text{s}$ (p → poise)

Compressibilidade do esqueleto sólido + flúido:

$C = \alpha + n\beta = 5\times10^{-4}\ \text{MPa}^{-1}$

Pressão constante ao longo do tempo nos poços:

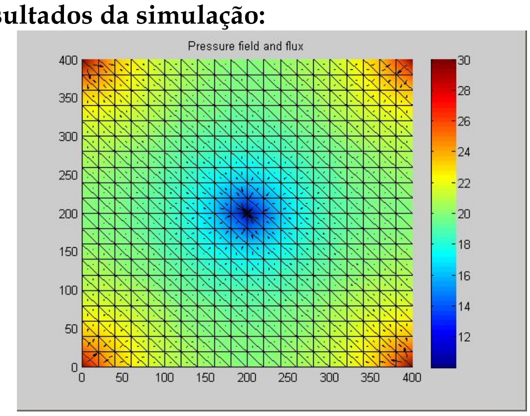
Em P1 → $p = 10$ MPa

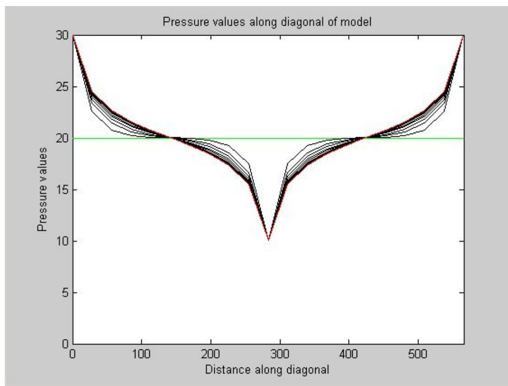
Em P1 a P5 → $p = 30$ MPa

Equação diferencial a ser resolvida:

$$\boxed{C\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{K}{\mu}\cdot\left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right]}$$

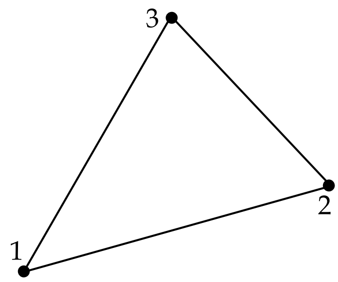
Resultados da simulação:





Formulação em Elementos Finitos

Equações em EF no nível de um elemento:



$$[M]\{\dot{p}\}+[K]\{p\}=\{c\}$$

onde:

$[M]\rightarrow$ matriz de armazenamento de um elemento finito

$[K]\rightarrow$ matriz de permeabilidade de um elemento finito

$\{p\}$ e $\{\dot{p}\}$ $\rightarrow$ vetor dos valores nodais de pressão e de sua derivada no tempo para um elemento finito

$\{c\}$ $\rightarrow$ vetor contendo condições de contorno para um elemento finito

Matrizes para cada elemento finito:

Utilizar a matriz de armazenamento condensada:

$$[M]=\frac{C\cdot\Delta\cdot e}{3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

sendo $\Delta\rightarrow$ área do elemento finito triangular e $e\rightarrow$ espessura do reservatório.

$$\Delta=\frac{1}{2}\cdot\left(x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_3+x_3\cdot y_1-y_1\cdot x_2-y_2\cdot x_3-y_3\cdot x_1\right)$$

A matriz de armazenamento consistente (não será usada) seria igual a:

$[M]=\int_\Omega \underset{\sim}{N}^T\cdot\underset{\sim}{N}\cdot C\cdot e\cdot d\Omega$, onde $\underset{\sim}{N}\rightarrow$ é o vetor das funções de forma do elemento finito triangular linear

$\underset{\sim}{N}=\left[N_1 \quad N_2 \quad N_3\right]$, sendo $\boxed{N_1=1-r-s}$ $\boxed{N_2=r}$ $\boxed{N_3=s}$

$$[K]=\int_\Omega \underset{\sim}{B}^T\cdot\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{B}\cdot e\cdot d\Omega$$

No caso do elemento finito triangular linear $\underset{\sim}{B}\rightarrow$ constante. Dessa forma: $\boxed{[K]=\Delta\cdot\underset{\sim}{B}^T\cdot\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{B}\cdot e}$

onde:

$$[k]=\frac{K}{\mu}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad [B]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial x}\\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y}\end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial x} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial r} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial r} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial s} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{3} N_i \cdot x_i = (1-r-s)\cdot x_1 + r \cdot x_2 + s \cdot x_3 \\ y = \sum_{i=1}^{3} N_i \cdot y_i = (1-r-s)\cdot y_1 + r \cdot y_2 + s \cdot y_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad [J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-x_1 + x_2) & (-y_1 + y_2) \\ (-x_1 + x_3) & (-y_1 + y_3) \end{bmatrix}$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial s} & -\dfrac{\partial y}{\partial r} \\ -\dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} \qquad |J| = \frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} (-y_1 + y_3) & (+y_1 - y_2) \\ (+x_1 - x_3) & (-x_1 + x_2) \end{bmatrix} \qquad \boxed{|J| = -x_1 \cdot y_3 - x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_2}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \rightarrow [B] = [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial r} & \dfrac{\partial N_2}{\partial r} & \dfrac{\partial N_3}{\partial r} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial s} & \dfrac{\partial N_2}{\partial s} & \dfrac{\partial N_3}{\partial s} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[B] = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} (+y_2 - y_3) & (-y_1 + y_3) & (+y_1 - y_2) \\ (-x_2 + x_3) & (+x_1 - x_3) & (-x_1 + x_2) \end{bmatrix}}$$

Equações em EF no nível global

$[M]\{\dot{p}\} + [K]\{p\} = \{c\}$

onde:

$\{p\}$ e $\{\dot{p}\}$ $\rightarrow$ vetor global dos valores nodais de pressão e de sua derivada no tempo

$\{c\}$ $\rightarrow$ vetor global contendo condições de contorno

$$[M] = \sum_{j=1}^{ne} [M]_j \qquad [K] = \sum_{j=1}^{ne} [K]_j$$

Os somatórios acima subentendem um espalhamento prévio das matrizes dos elementos finitos da numeração local para a numeração global. ne $\rightarrow$ número de elementos finitos do modelo.

Solução em regime transiente

Sistema geral de equações a ser resolvido em cada passo de tempo Δt :

$$[F]\{p_{t+\Delta t}\}=\{c\}+[L]\{p_t\}$$

onde:

$$[F]=\left[\frac{1}{\Delta t}\cdot \underset{\sim}{M}+\varepsilon\cdot \underset{\sim}{K}\right] \qquad [L]=\left[\frac{1}{\Delta t}\cdot \underset{\sim}{M}+(1-\varepsilon)\cdot \underset{\sim}{K}\right]$$

$$\begin{cases} \varepsilon=0 & \rightarrow \quad \text{explícito} \\ \varepsilon=1/2 & \rightarrow \quad \text{Crank - Nicolson} \\ \varepsilon=1 & \rightarrow \quad \text{totalmente implícito} \end{cases}$$

$[F]$ e $[L]$ $\rightarrow$ matrizes globais

Em cada passo de tempo a solução de pressões nodais do passo anterior $\{p_t\}$ é conhecida. No primeiro passo, $\{p_t\}=\{p_0\}$ é fornecido como condição inicial. Isso resulta em um sistema de equações a ser resolvido em cada passo de tempo:

$$[F]\{p_{t+\Delta t}\}=\{R\}$$

Para $\varepsilon=0$, como a matriz global de armazenamento específico $[M]$ na presente formulação foi condensada, isto é, somente os termos da diagonal principal são diferentes de zero, a solução é trivial:

$$(p_{t+\Delta t})_i=\frac{\Delta t}{M_{ii}}\cdot R_i$$

Consideração das condições de contorno essenciais (de Dirichlet)

Inicialmente, a matriz global $[F]$ e o vetor das cargas nodais $\{R\}$ são montados sem considerar nenhuma condição de contorno. Para considerar as condições de contorno essenciais do problema proposto (pressão prescrita nos poços de produção e de injeção) é necessário modificar essa matriz e esse vetor. Abaixo está mostrado o formato do sistema de equações $[F]\{p\}=\{R\}$, sem levar em conta o fato que muitos termos da matriz $[F]$ são nulos. Considere que no nó i tem um poço com pressão prescrita P_i:

$$\begin{bmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} & F_{1,3} & \cdots & F_{1,i} & & & \\ F_{2,1} & F_{2,2} & F_{2,3} & \cdots & F_{2,i} & & & \\ & & & & \cdots & & & \\ & & & & F_{i-1,i} & & & \\ F_{i,1} & F_{i,2} & \cdots & F_{i,i-1} & F_{i,i} & F_{i,i+1} & \cdots & F_{i,n} \\ & & & & F_{i+1,i} & & & \\ & & & & \cdots & & & \cdots \\ & & & & F_{n,i} & & \cdots & F_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_{i-1} \\ P_i \\ p_{i+1} \\ \cdots \\ p_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdots \\ R_{i-1} \\ R_i \\ R_{i+1} \\ \cdots \\ R_n \end{Bmatrix}$$

Aqui são mostradas duas maneiras para modificar a matriz [F] e o vetor {R} para considerar as condições de contorno essenciais. Na primeira maneira, a i-ésima linha e a i-ésima coluna da matriz [F] e o vetor {R} são modificadas tal como indicado abaixo:

$$
\begin{bmatrix}
F_{1,1} & F_{1,2} & F_{1,3} & \dots & 0 & & & \\
F_{2,1} & F_{2,2} & F_{2,3} & \dots & 0 & & & \\
 & & & & \dots & & & \\
 & & & & 0 & & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 & & & & 0 & & & \\
 & & & & \dots & & & \dots \\
 & & & & 0 & & \dots & F_{n,n}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_{i-1} \\ p_i \\ p_{i+1} \\ \dots \\ p_n \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} R_1 - F_{1,i} \cdot P_i \\ R_2 - F_{2,i} \cdot P_i \\ \dots \\ R_{i-1} - F_{i-1,i} \cdot P_i \\ P_i \\ R_{i+1} - F_{i+1,i} \cdot P_i \\ \dots \\ R_n - F_{n,i} \cdot P_i \end{Bmatrix}
$$

A i-ésima linha da matriz fica com um "1" na diagonal principal e "0" nos outros termos. Nesta linha, o termo de carga R_i no vetor {R} é substituído pelo valor da condição de contorno essencial P_i. Para manter a simetria da matriz global, os outros termos da i-ésima coluna da matriz são anulados, sendo que os termos de carga correspondentes são alterados tal como indicado, levando-se em conta que os termos anulados da matriz são os que multiplicam o valor conhecido da condição de contorno essencial. Dessa forma, o número de equações do sistema não se altera em relação ao número total de nós, p_i continua sendo uma incógnita, e a solução da i-ésima linha do sistema resulta na condição de contorno essencial.

A segunda maneira utiliza um artifício que soma ao termo da diagonal da matriz [F] que corresponde ao nó com pressão prescrita um coeficiente fictício G com valor muito grande (por exemplo, 10^4 vezes o maior valor entre os termos da diagonal principal de [F]). O termo correspondente do vetor {R} é acrescido de G vezes o valor da pressão prescrita.

$$
\begin{bmatrix}
F_{1,1} & F_{1,2} & F_{1,3} & \dots & F_{1,i} & & & \\
F_{2,1} & F_{2,2} & F_{2,3} & \dots & F_{2,i} & & & \\
 & & & & \dots & & & \\
 & & & & F_{i-1,i} & & & \\
F_{i,1} & F_{i,2} & \dots & F_{i,i-1} & \left(F_{i,i} + G\right) & F_{i,i+1} & \dots & F_{i,n} \\
 & & & & F_{i+1,i} & & & \\
 & & & & \dots & & & \dots \\
 & & & & F_{n,i} & & \dots & F_{n,n}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_{i-1} \\ p_i \\ p_{i+1} \\ \dots \\ p_n \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_{i-1} \\ G \cdot P_i \\ R_{i+1} \\ \dots \\ R_n \end{Bmatrix}
$$

Esse procedimento é um macete numérico conhecido. Como G tem um valor muito grande em relação aos outros coeficientes da matriz [F], na solução da i-ésima linha do sistema de equações o valor de G ofusca os valores dos outros coeficientes, resultando em:

$$p_i \approx \frac{G \cdot P_i}{G} = P_i$$

Dessa forma, as modificações na matriz [F] e no vetor {R} são mínimas, não afetando as outras linhas do sistema de equações.