# CIV 2552 – Mét. Num. Prob. de Fluxo e Transporte em Meios Porosos

## Método dos Elementos Finitos
## Fluxo 2D em regime transiente em reservatório

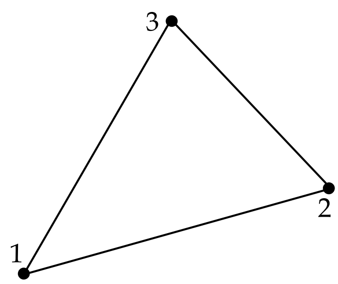
**Condições iniciais e parâmetros pertinentes:**
Pressão inicial: $p_0$ [MPa]
Permeabilidade intrínseca:
$K$ [md = $10^{-15}$ m$^2$] (md →mili-darcis)
Viscosidade dinâmica:
$\mu$ [p = $10^{-10}$ MPa · s] (p →poise)
Compressibilidade do esqueleto sólido + flúido:
$C = \alpha + n\beta$ [MPa$^{-1}$]

**Equação diferencial a ser resolvida numericamente pelo Método dos Elementos Finitos:**

$$\boxed{C\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{K}{\mu}\cdot\left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right]}$$

### Formulação em Elementos Finitos triangulares lineares (T3)

**Equações em EF no nível de um elemento:**




$$[M]\{\dot{p}\} + [K]\{p\} = \{c\}$$

onde:

$[M] \rightarrow$ matriz de armazenamento de um elemento finito

$[K] \rightarrow$ matriz de permeabilidade de um elemento finito

$\{p\}$ e $\{\dot{p}\}$ → vetor dos valores nodais de pressão e de sua derivada no tempo para um elemento finito

$\{c\}$ → vetor contendo condições de contorno para um elemento finito

**Matrizes para cada elemento finito:**

Utilizar a matriz de armazenamento condensada:

$$[M] = \frac{C\cdot\Delta\cdot e}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sendo $\Delta \rightarrow$ área do elemento finito triangular e $e \rightarrow$ espessura do reservatório.

$$\Delta = \frac{1}{2}\cdot\left(x_1\cdot y_2 + x_2\cdot y_3 + x_3\cdot y_1 - y_1\cdot x_2 - y_2\cdot x_3 - y_3\cdot x_1\right)$$

A matriz de armazenamento consistente (não será usada) seria igual a:

$[M] = \int_\Omega \underset{\sim}{N}^T \cdot \underset{\sim}{N}\cdot C\cdot e\cdot d\Omega$, onde $\underset{\sim}{N} \rightarrow$ é o vetor das funções de forma do elemento finito triangular linear

$\underset{\sim}{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3]$, sendo $\boxed{N_1 = 1 - r - s}$ $\boxed{N_2 = r}$ $\boxed{N_3 = s}$

$$[K] = \int_{\Omega} \underset{\sim}{B}^T \cdot \underset{\sim}{k} \cdot \underset{\sim}{B} \cdot e \cdot d\Omega$$

No caso do elemento finito triangular linear $\underset{\sim}{B} \rightarrow$ constante. Dessa forma: $\boxed{[K] = \Delta \cdot \underset{\sim}{B}^T \cdot \underset{\sim}{k} \cdot \underset{\sim}{B} \cdot e}$

onde:

$$[k] = \frac{K}{\mu} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{3} N_i \cdot x_i = (1 - r - s) \cdot x_1 + r \cdot x_2 + s \cdot x_3 \\ y = \sum_{i=1}^{3} N_i \cdot y_i = (1 - r - s) \cdot y_1 + r \cdot y_2 + s \cdot y_3 \end{cases} \Rightarrow [J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-x_1 + x_2) & (-y_1 + y_2) \\ (-x_1 + x_3) & (-y_1 + y_3) \end{bmatrix}$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} \qquad |J| = \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} (-y_1 + y_3) & (+y_1 - y_2) \\ (+x_1 - x_3) & (-x_1 + x_2) \end{bmatrix} \qquad \boxed{|J| = -x_1 \cdot y_3 - x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_2}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \rightarrow [B] = [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[B] = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} (+y_2 - y_3) & (-y_1 + y_3) & (+y_1 - y_2) \\ (-x_2 + x_3) & (+x_1 - x_3) & (-x_1 + x_2) \end{bmatrix}}$$

**Equações em EF no nível global**

$[M]\{\dot{p}\}+[K]\{p\}=\{c\}$

onde:

$\{p\}$ e $\{\dot{p}\}$ $\rightarrow$ vetor global dos valores nodais de pressão e de sua derivada no tempo

$\{c\}$ $\rightarrow$ vetor global contendo condições de contorno

$$[M]=\sum_{j=1}^{ne}[M]_j \qquad [K]=\sum_{j=1}^{ne}[K]_j$$

Os somatórios acima subentendem um espalhamento prévio das matrizes dos elementos finitos da numeração local para a numeração global. $ne$ $\rightarrow$ número de elementos finitos do modelo.

**Solução em regime transiente**

**Sistema geral de equações a ser resolvido em cada passo de tempo $\Delta t$ :**

$[F]\{p_{t+\Delta t}\}=\{c\}+[L]\{p_t\}$

onde:

$$[F]=\left[\frac{1}{\Delta t}\cdot \underset{\sim}{M}+\varepsilon\cdot \underset{\sim}{K}\right] \qquad [L]=\left[\frac{1}{\Delta t}\cdot \underset{\sim}{M}+(1-\varepsilon)\cdot \underset{\sim}{K}\right]$$

$$\begin{cases} \varepsilon=0 & \rightarrow \text{ explícito} \\ \varepsilon=1/2 & \rightarrow \text{ Crank - Nicolson} \\ \varepsilon=1 & \rightarrow \text{ totalmente implícito} \end{cases}$$

$[F]$ e $[L]$ $\rightarrow$ matrizes globais

Em cada passo de tempo a solução de pressões nodais do passo anterior $\{p_t\}$ é conhecida. No primeiro passo, $\{p_t\}=\{p_0\}$ é fornecido como condição inicial. Isso resulta em um sistema de equações a ser resolvido em cada passo de tempo:

$[F]\{p_{t+\Delta t}\}=\{R\}$

Para $\varepsilon=0$ , como a matriz global de armazenamento específico $[M]$ na presente formulação foi condensada, isto é, somente os termos da diagonal principal são diferentes de zero, a solução é trivial:

$$(p_{t+\Delta t})_i=\frac{\Delta t}{M_{ii}}\cdot R_i$$

**Consideração das condições de contorno essenciais (de Dirichlet)**

Inicialmente, a matriz global [$F$] e o vetor das cargas nodais {$R$} são montados sem considerar nenhuma condição de contorno. Para considerar as condições de contorno essenciais do problema proposto (pressão prescrita nos poços de produção e de injeção) é necessário modificar essa matriz e esse vetor. Abaixo está mostrado o formato do sistema de equações $[F]\{p\}=\{R\}$, sem levar em conta o fato que muitos termos da matriz [$F$] são nulos. Considere que no nó $i$ tem um poço com pressão prescrita $P_i$:

$$\begin{bmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} & F_{1,3} & \dots & F_{1,i} & & & \\ F_{2,1} & F_{2,2} & F_{2,3} & \dots & F_{2,i} & & & \\ & & & & \dots & & & \\ & & & & F_{i-1,i} & & & \\ F_{i,1} & F_{i,2} & \dots & F_{i,i-1} & F_{i,i} & F_{i,i+1} & \dots & F_{i,n} \\ & & & & F_{i+1,i} & & & \\ & & & & \dots & & & \dots \\ & & & & F_{n,i} & & \dots & F_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_{i-1} \\ P_i \\ p_{i+1} \\ \dots \\ p_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_{i-1} \\ R_i \\ R_{i+1} \\ \dots \\ R_n \end{Bmatrix}$$

Aqui são mostradas duas maneiras para modificar a matriz [$F$] e o vetor {$R$} para considerar as condições de contorno essenciais. Na primeira maneira, a $i$-ésima linha e a $i$-ésima coluna da matriz [$F$] e o vetor {$R$} são modificadas tal como indicado abaixo:

$$\begin{bmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} & F_{1,3} & \dots & 0 & & & \\ F_{2,1} & F_{2,2} & F_{2,3} & \dots & 0 & & & \\ & & & & \dots & & & \\ & & & & 0 & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & \dots & & & \dots \\ & & & & 0 & & \dots & F_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_{i-1} \\ p_i \\ p_{i+1} \\ \dots \\ p_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 - F_{1,i} \cdot P_i \\ R_2 - F_{2,i} \cdot P_i \\ \dots \\ R_{i-1} - F_{i-1,i} \cdot P_i \\ P_i \\ R_{i+1} - F_{i+1,i} \cdot P_i \\ \dots \\ R_n - F_{n,i} \cdot P_i \end{Bmatrix}$$

A $i$-ésima linha da matriz fica com um "1" na diagonal principal e "0" nos outros termos. Nesta linha, o termo de carga $R_i$ no vetor {$R$} é substituído pelo valor da condição de contorno essencial $P_i$. Para manter a simetria da matriz global, os outros termos da $i$-ésima coluna da matriz são anulados, sendo que os termos de carga correspondentes são alterados tal como indicado, levando-se em conta que os termos anulados da matriz são os que multiplicam o valor conhecido da condição de contorno essencial. Dessa forma, o número de equações do sistema não se altera em relação ao número total de nós, $p_i$ continua sendo uma incógnita, e a solução da $i$-ésima linha do sistema resulta na condição de contorno essencial.

A segunda maneira utiliza um artifício que soma ao termo da diagonal da matriz [$F$] que corresponde ao nó com pressão prescrita um coeficiente fictício $G$ com valor muito grande (por exemplo, $10^4$ vezes o maior valor entre os termos da diagonal principal de [$F$]). O termo correspondente do vetor {$R$} é acrescido de $G$ vezes o valor da pressão prescrita.

$$\begin{bmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} & F_{1,3} & \cdots & F_{1,i} & & & \\ F_{2,1} & F_{2,2} & F_{2,3} & \cdots & F_{2,i} & & & \\ & & & & \cdots & & & \\ & & & & F_{i-1,i} & & & \\ F_{i,1} & F_{i,2} & \cdots & F_{i,i-1} & \left(F_{i,i}+G\right) & F_{i,i+1} & \cdots & F_{i,n} \\ & & & & F_{i+1,i} & & & \\ & & & & \cdots & & & \cdots \\ & & & & F_{n,i} & & \cdots & F_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_{i-1} \\ p_i \\ p_{i+1} \\ \cdots \\ p_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdots \\ R_{i-1} \\ G \cdot P_i \\ R_{i+1} \\ \cdots \\ R_n \end{Bmatrix}$$

Esse procedimento é um macete numérico conhecido. Como $G$ tem um valor muito grande em relação aos outros coeficientes da matriz [$F$], na solução da $i$-ésima linha do sistema de equações o valor de $G$ ofusca os valores dos outros coeficientes, resultando em:

$$p_i \approx \frac{G \cdot P_i}{G} = P_i$$

Dessa forma, as modificações na matriz [$F$] e no vetor {$R$} são mínimas, não afetando as outras linhas do sistema de equações.