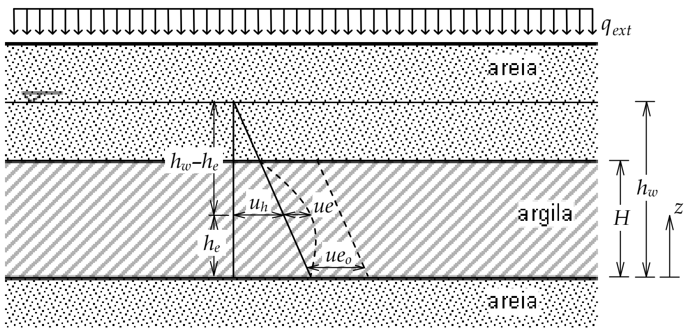
CIV 2552 – Métodos Numéricos em Problemas de Fluxo e Transporte em Meios Porosos

Formulação de Problemas de Adensamento por Volume de Controle em Diferenças Finitas

Camada homogênea: parâmetros do modelo

$u \rightarrow$ poropressão total [F/L²]
$ue \rightarrow$ excesso de poropressão [F/L²]
$ue_o \rightarrow$ excesso inicial de poropressão devido à sobrecarga [F/L²]
$u_h \rightarrow$ poropressão hidrostática [F/L²]
$h \rightarrow$ carga hidráulica total [L]
$h_e \rightarrow$ carga de elevação (em relação ao referencial de carga hidráulica) [L]
$h_p \rightarrow$ carga de pressão hidrostática [L]
$k \rightarrow$ permeabilidade do meio [L/T]
$\gamma_w \rightarrow$ densidade do fluído (água) [F/L³]
$m_V \rightarrow$ compressibilidade do esqueleto [L²/F]
$S_s = \gamma_w \cdot m_V \rightarrow$ armazenamento específico (*specific storage*) do meio poroso [1/L]
$C_V = k / S_s \rightarrow$ coeficiente de adensamento [L²/T]

$q_{ext} \rightarrow$ sobrecarga [F/L²]
$A \rightarrow$ área da seção da coluna unidimensional [L²]
$h_w \rightarrow$ nível do lençol freático [L]
$H \rightarrow$ espessura da camada [L]



Relação entre carga hidráulica e excesso de poropressão

Considerando que o nível do lençol freático não se altera, a poropressão final em regime permanente é a poropressão hidrostática. Dessa forma:

$$h = \frac{u}{\gamma_w} + h_e = \frac{u_h + ue}{\gamma_w} + h_e \quad \rightarrow \quad h = \frac{ue}{\gamma_w} + \frac{u_h}{\gamma_w} + h_e = \frac{ue}{\gamma_w} + (h_w - h_e) + h_e \quad \rightarrow \quad \boxed{h = \frac{ue}{\gamma_w} + h_w}$$

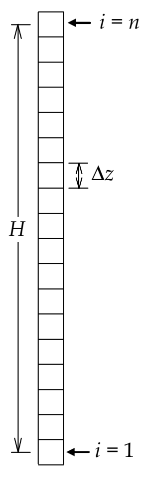
Lei de Darcy

fluxo hidráulico [L/T] $\rightarrow$

$$\boxed{q = -k \cdot \frac{dh}{dz}} \quad \rightarrow \quad q = -\frac{k}{\gamma_w} \cdot \frac{due}{dz} - k \cdot \frac{dh_w}{dz} \quad \rightarrow \quad \boxed{q = -\frac{k}{\gamma_w} \cdot \frac{due}{dz}}$$

Parâmetros de discretização

$n \rightarrow$ número de pontos (células) ao longo da espessura da camada
$\Delta z = H/(n-1) \rightarrow$ comprimento da célula na direção z [L]
($H \rightarrow$ do centro da primeira célula para centro da última célula)



Condições de contorno

Em termos de carga hidráulica:

<u>Carga hidráulica prescrita na base:</u>
$h(z=0) = h_e(0) + h_p(0) = 0 + h_w = h_w$

<u>Carga hidráulica prescrita no topo:</u>
$h(z=H) = h_e(H) + h_p(H) = H + (h_w - H) = h_w$

<u>Camada impermeável na base:</u>

$$q\big|_{z=0} = 0 \;\rightarrow\; \left.\frac{dh}{dz}\right|_{z=0} = 0$$

<u>Camada impermeável no topo:</u>

$$q\big|_{z=H} = 0 \;\rightarrow\; \left.\frac{dh}{dz}\right|_{z=H} = 0$$

Em termos de excesso poropressão:

Excesso de poropressão nulo na base:
$ue(z=0) = 0$

Camada impermeável na base:

$$q\big|_{z=0} = 0 \;\rightarrow\; \left.\frac{due}{dz}\right|_{z=0} = 0$$

Excesso de poropressão nulo no topo:
$ue(z=H) = 0$

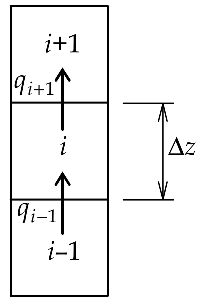
Camada impermeável no topo:

$$q\big|_{z=H} = 0 \;\rightarrow\; \left.\frac{due}{dz}\right|_{z=H} = 0$$

Balanço de vazão hidráulica em uma célula

(a célula é um volume de controle; convenção: vazão que entra na célula é positivo)

[*Vazão que entra na célula*] = [*Vazão que sai da célula*] + [*Vazão retida dentro da célula*]



$$\left[q_{i-1} \cdot A\right] = \left[q_{i+1} \cdot A\right] + \left[S_s \cdot \Delta z \cdot A \cdot \frac{\partial h_i}{\partial t}\right]$$

$$q_{i-1} \cdot A - q_{i+1} \cdot A = S_s \cdot \Delta z \cdot A \cdot \frac{\partial h_i}{\partial t} \qquad [\div A] \;\Rightarrow\; q_{i-1} - q_{i+1} = S_s \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial h_i}{\partial t}$$

Usando a Lei de Darcy e a aproximação de derivada em diferenças finitas:

$$\left(q \cong -\frac{k}{\gamma_w} \cdot \Delta h / \Delta z\right) \text{ e } \;\Rightarrow\; \left(-k \cdot \frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta z}\right) - \left(-k \cdot \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta z}\right) = S_s \cdot \frac{\partial h_i}{\partial t} \cdot \Delta z \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{h_{i-1} - 2h_i + h_{i+1}}{\Delta z^2} = \frac{S_s}{k} \cdot \frac{\partial h_i}{\partial t}}$$

Usando a relação entre carga hidráulica e excesso de poropressão:

$$\frac{\frac{ue_{i-1}}{\gamma_w} - \frac{2ue_i}{\gamma_w} + \frac{ue_{i+1}}{\gamma_w} + h_w - 2h_w + h_w}{\Delta z^2} = \frac{S_s}{k} \cdot \frac{\partial h_i}{\partial t}$$

Observe que:

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = \frac{1}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial ue_i}{\partial t} + \frac{\partial h_w}{\partial t} = \frac{1}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial ue_i}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\gamma_w} \cdot \frac{ue_{i-1} - 2ue_i + ue_{i+1}}{\Delta z} = \frac{S_s}{\gamma_w \cdot k} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} \cdot \Delta z$$

$$\left[\times \gamma_w\right] \;\Rightarrow\; \frac{ue_{i-1} - 2ue_i + ue_{i+1}}{\Delta z^2} = \frac{S_s}{k} \cdot \frac{\partial ue_i}{\partial t} \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{ue_{i-1} - 2ue_i + ue_{i+1}}{\Delta z^2} = \frac{1}{C_V} \cdot \frac{\partial ue_i}{\partial t}}$$

Solução explícita da resposta transiente

Em termos de carga hidráulica:

Considerando que os valores de carga hidráulica em todos os pontos são conhecidos em um passo de tempo genérico (m), a aproximação da resposta para o passo seguinte de tempo (m+1) na solução explícita é tal que cada valor h_i^{m+1} só depende de valores do passo anterior. Isso resulta em:

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} \cong \frac{h_i^{m+1} - h_i^m}{\Delta t} \;\Rightarrow\; -\frac{S_s}{k} \cdot \frac{h_i^{m+1}}{\Delta t} = -\frac{h_{i-1}^m - 2h_i^m + h_{i+1}^m}{\Delta z^2} - \frac{S_s}{k} \cdot \frac{h_i^m}{\Delta t}$$

$$\left[\times\left(-\frac{k}{S_s} \cdot \Delta t\right)\right] \;\Rightarrow\; (i = 2:n-1) \;\rightarrow\; h_i^{m+1} = h_i^m + \frac{k}{S_s} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \cdot \left(h_{i-1}^m - 2h_i^m + h_{i+1}^m\right)$$

Sendo $\boxed{r = \frac{k}{S_s} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta z^2}}$ $\;\Rightarrow\; (i = 2:n-1) \;\rightarrow\; \boxed{h_i^{m+1} = r \cdot h_{i-1}^m + (1-2r) \cdot h_i^m + r \cdot h_{i+1}^m}$

Carga hidráulica prescrita na base:

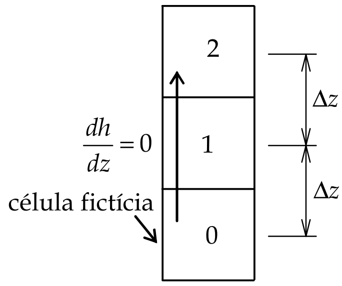
$$(i=1) \rightarrow \boxed{h_1 = h_w}$$

Camada impermeável na base:

$$\left.\frac{dh}{dz}\right|_{z=0} = 0 \rightarrow \frac{h_2 - h_0}{2\Delta z} = 0 \rightarrow \boxed{h_0 = h_2}$$

$$h_1^{m+1} = r \cdot h_0^m + (1-2r) \cdot h_1^m + r \cdot h_2^m \quad \Rightarrow$$

$$(i=1) \rightarrow \boxed{h_1^{m+1} = (1-2r) \cdot h_1^m + 2r \cdot h_2^m}$$



Carga hidráulica prescrita no topo:

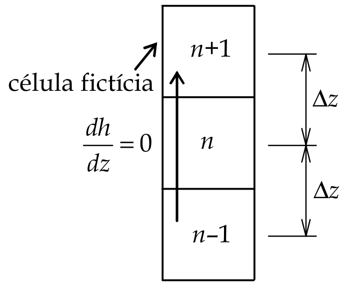
$$(i=n) \rightarrow \boxed{h_n = h_w}$$

Camada impermeável na base:

$$\left.\frac{dh}{dz}\right|_{z=H} = 0 \rightarrow \frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{2\Delta z} = 0 \rightarrow \boxed{h_{n+1} = h_{n-1}}$$

$$h_n^{m+1} = r \cdot h_{n-1}^m + (1-2r) \cdot h_n^m + r \cdot h_{n+1}^m \quad \Rightarrow$$

$$(i=n) \rightarrow \boxed{h_n^{m+1} = 2r \cdot h_{n-1}^m + (1-2r) \cdot h_n^m}$$



Em termos de excesso de poropressão:

$$\frac{\partial ue_i}{\partial t} \cong \frac{ue_i^{m+1} - ue_i^m}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad -\frac{ue_i^{m+1}}{C_V \cdot \Delta t} = -\frac{ue_{i-1}^m - 2ue_i^m + ue_{i+1}^m}{\Delta z^2} - \frac{ue_i^m}{C_V \cdot \Delta t}$$

$$[\times(-C_V \cdot \Delta t)] \quad \Rightarrow \quad (i = 2:n-1) \rightarrow ue_i^{m+1} = ue_i^m + \frac{C_V \cdot \Delta t}{\Delta z^2} \cdot \left(ue_{i-1}^m - 2ue_i^m + ue_{i+1}^m\right)$$

Sendo $\boxed{r = \frac{C_V \cdot \Delta t}{\Delta z^2}} \quad \Rightarrow \quad (i = 2:n-1) \rightarrow \boxed{ue_i^{m+1} = r \cdot ue_{i-1}^m + (1-2r) \cdot ue_i^m + r \cdot ue_{i+1}^m}$

Excesso de poropressão nulo na base:

$$(i=1) \rightarrow \boxed{ue_1 = 0}$$

Camada impermeável na base:

$$\left.\frac{due}{dz}\right|_{z=0} = 0 \rightarrow \frac{ue_2 - ue_0}{2\Delta z} = 0 \rightarrow \boxed{ue_0 = ue_2}$$

$$ue_1^{m+1} = r \cdot ue_0^m + (1-2r) \cdot ue_1^m + r \cdot ue_2^m \quad \Rightarrow$$

$$(i=1) \rightarrow \boxed{ue_1^{m+1} = (1-2r) \cdot ue_1^m + 2r \cdot ue_2^m}$$

Excesso de poropressão nulo no topo:

$$(i=n) \rightarrow \boxed{ue_n = 0}$$

Camada impermeável na base:

$$\left.\frac{due}{dz}\right|_{z=H} = 0 \rightarrow \frac{ue_{n+1} - ue_{n-1}}{2\Delta z} = 0 \rightarrow \boxed{ue_{n+1} = ue_{n-1}}$$

$$ue_n^{m+1} = r \cdot ue_{n-1}^m + (1-2r) \cdot ue_n^m + r \cdot ue_{n+1}^m \quad \Rightarrow$$

$$(i=n) \rightarrow \boxed{ue_n^{m+1} = 2r \cdot ue_{n-1}^m + (1-2r) \cdot ue_n^m}$$

Solução implícita da resposta transiente: Método de Crank-Nicolson

Em termos de carga hidráulica:

A aproximação em diferenças finitas da segunda derivada da carga hidráulica em relação a z é considerada como uma média de valores calculados no passo de tempo (m) e no passo seguinte de tempo (m+1):

$$\frac{1}{2}\left[\frac{h_{i-1}-2h_i+h_{i+1}}{\Delta z^2}\right]^m+\frac{1}{2}\left[\frac{h_{i-1}-2h_i+h_{i+1}}{\Delta z^2}\right]^{m+1}=\frac{S_s}{k}\cdot\frac{h_i^{m+1}-h_i^m}{\Delta t}$$

$$\left[\times\Delta z^2\right]\ \Rightarrow\quad \frac{u_{i-1}^{m+1}-2u_i^{m+1}+u_{i+1}^{m+1}}{2}-\frac{S_s}{k}\cdot\frac{\Delta z^2}{\Delta t}\cdot u_i^{m+1}=-\frac{u_{i-1}^{m}-2u_i^{m}+u_{i+1}^{m}}{2}-\frac{S_s}{k}\cdot\frac{\Delta z^2}{\Delta t}\cdot u_i^{m}$$

$$\boxed{r=\frac{k}{S_s}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta z^2}}\quad\Rightarrow\quad(i=2:n-1)\ \rightarrow\ \boxed{-h_{i-1}^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)h_i^{m+1}-h_{i+1}^{m+1}=h_{i-1}^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)h_i^m+h_{i+1}^m}$$

<u>Carga hidráulica prescrita na base:</u>

$$(i=1)\ \rightarrow\ \boxed{h_1=h_w}$$

<u>Camada impermeável na base:</u>

Valor da carga hidráulica na célula fictícia: $\boxed{h_0=h_2}$

$$-h_0^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)h_1^{m+1}-h_2^{m+1}=h_0^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)h_1^m+h_2^m$$

$$(i=1)\ \rightarrow\ \boxed{\left(2+\frac{2}{r}\right)h_1^{m+1}-2h_2^{m+1}=\left(\frac{2}{r}-2\right)h_1^m+2h_2^m}$$

<u>Carga hidráulica prescrita no topo:</u>

$$(i=n)\ \rightarrow\ \boxed{h_n=h_w}$$

<u>Camada impermeável na base:</u>

Valor da carga hidráulica na célula fictícia: $\boxed{h_{n+1}=h_{n-1}}$

$$-h_{n-1}^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)h_n^{m+1}-h_{n+1}^{m+1}=h_{n-1}^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)h_n^m+h_{n+1}^m$$

$$(i=n)\ \rightarrow\ \boxed{-2h_{n-1}^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)h_n^{m+1}=2h_{n-1}^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)h_n^m}$$

Em termos de excesso de poropressão:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{ue_{i-1}-2ue_i+ue_{i+1}}{\Delta z^2}\right]^m+\frac{1}{2}\left[\frac{ue_{i-1}-2ue_i+ue_{i+1}}{\Delta z^2}\right]^{m+1}=\frac{1}{C_V}\cdot\frac{ue_i^{m+1}-ue_i^m}{\Delta t}$$

$$\left[\times\Delta z^2\right]\ \Rightarrow\quad \frac{ue_{i-1}^{m+1}-2ue_i^{m+1}+ue_{i+1}^{m+1}}{2}-\frac{\Delta z^2}{C_V\cdot\Delta t}\cdot ue_i^{m+1}=-\frac{ue_{i-1}^{m}-2eu_i^{m}+ue_{i+1}^{m}}{2}-\frac{\Delta z^2}{C_V\cdot\Delta t}\cdot ue_i^{m}$$

$$\boxed{r=\frac{C_V\cdot\Delta t}{\Delta z^2}}\quad\Rightarrow\quad(i=2:n-1)\ \rightarrow\ \boxed{-ue_{i-1}^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)ue_i^{m+1}-ue_{i+1}^{m+1}=ue_{i-1}^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)ue_i^m+ue_{i+1}^m}$$

<u>Excesso de poropressão nulo na base:</u>

$$(i=1)\ \rightarrow\ \boxed{ue_1=0}$$

<u>Camada impermeável na base:</u>

Valor do excesso de poropressão na célula fictícia: $\boxed{ue_0=ue_2}$

$$-ue_0^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)ue_1^{m+1}-ue_2^{m+1}=ue_0^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)ue_1^m+ue_2^m$$

$$(i=1)\ \rightarrow\ \boxed{\left(2+\frac{2}{r}\right)ue_1^{m+1}-2ue_2^{m+1}=\left(\frac{2}{r}-2\right)ue_1^m+2ue_2^m}$$

<u>Excesso de poropressão nulo no topo:</u>

$$(i=n)\ \rightarrow\ \boxed{ue_n=0}$$

<u>Camada impermeável na base:</u>

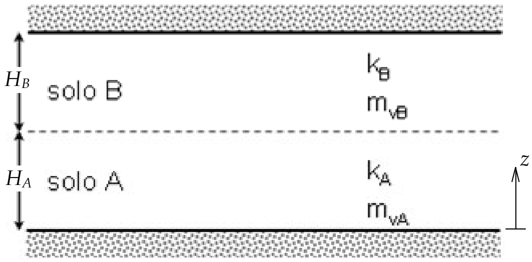
Valor do excesso de poropressão na célula fictícia: $\boxed{ue_{n+1}=ue_{n-1}}$

$$-ue_{n-1}^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)ue_n^{m+1}-ue_{n+1}^{m+1}=ue_{n-1}^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)ue_n^m+ue_{n+1}^m$$

$$(i=n)\ \rightarrow\ \boxed{-2ue_{n-1}^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)ue_n^{m+1}=2ue_{n-1}^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)ue_n^m}$$

Camada dupla (heterogênea): parâmetros adicionais do modelo

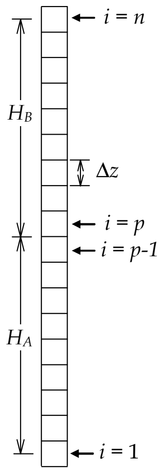
$k_A \rightarrow$ permeabilidade do meio A [L/T]
$k_B \rightarrow$ permeabilidade do meio B [L/T]
$m_{VA} \rightarrow$ compressibilidade do esqueleto do meio A [L²/F]
$m_{VB} \rightarrow$ compressibilidade do esqueleto do meio B [L²/F]
$S_{sA} = \gamma_w \cdot m_{VA} \rightarrow$ armazenamento específico do meio A [1/L]
$S_{sB} = \gamma_w \cdot m_{VB} \rightarrow$ armazenamento específico do meio B [1/L]
$H_A \rightarrow$ espessura da camada A [L]
$H_B \rightarrow$ espessura da camada B [L]



Parâmetros de discretização

$\Delta z \rightarrow$ comprimento da célula na direção z (adotado o mesmo para as duas camadas) [L]
$n_A \rightarrow$ número de pontos (células) ao longo da espessura da camada A
$n_B \rightarrow$ número de pontos (células) ao longo da espessura da camada B
$n = n_A + n_B \rightarrow$ número total de pontos (células)

$p - 1 = n_A \rightarrow$ índice da última célula da camada A
$p = n_A + 1 \rightarrow$ índice da primeira célula da camada B



Permeabilidade equivalente na interface entre as camadas

$$q_{p-1} = q_{p-1}^A = q_{p-1}^B$$

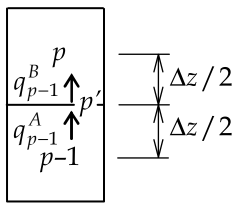
$$q_{p-1}^A = -k_A \cdot \frac{h_{p'} - h_{p-1}}{\Delta z/2} = k_A \cdot \frac{h_{p-1} - h_{p'}}{\Delta z/2} \quad \Rightarrow \quad h_{p-1} - h_{p'} = \frac{q_{p-1}^A}{k_A} \cdot \frac{\Delta z}{2}$$

$$q_{p-1}^B = -k_B \cdot \frac{h_p - h_{p'}}{\Delta z/2} = k_B \cdot \frac{h_{p'} - h_p}{\Delta z/2} \quad \Rightarrow \quad h_{p'} - h_p = \frac{q_{p-1}^B}{k_B} \cdot \frac{\Delta z}{2}$$

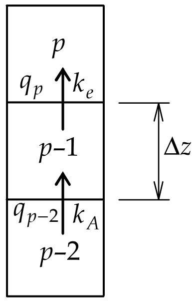
$$q_{p-1} = -k_e \cdot \frac{h_p - h_{p-1}}{\Delta z} = k_e \cdot \frac{h_{p-1} - h_p}{\Delta z} = k_e \cdot \frac{h_{p-1} - h_{p'} + h_{p'} - h_p}{\Delta z}$$

$$q_{p-1} = k_e \cdot \frac{\left(q_{p-1}^A / k_A\right) \cdot (\Delta z/2) + \left(q_{p-1}^B / k_B\right) \cdot (\Delta z/2)}{\Delta z} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{k_e}{2} \cdot \left(\frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{k_e = \frac{2 \cdot k_A \cdot k_B}{k_A + k_B}}$$



Balanço de vazão hidráulica na célula inferior da interface



Célula p–1:

$$\left[q_{p-2} \cdot A\right] = \left[q_p \cdot A\right] + \left[S_{sA} \cdot \Delta z \cdot A \cdot \frac{\partial h_{p-1}}{\partial t}\right]$$

Em termos de carga hidráulica:

$$[\div A] \quad \Rightarrow \quad \left(-k_A \cdot \frac{h_{p-1} - h_{p-2}}{\Delta z}\right) - \left(-k_e \cdot \frac{h_p - h_{p-1}}{\Delta z}\right) = S_{sA} \cdot \frac{\partial h_{p-1}}{\partial t} \cdot \Delta z$$

$$\frac{k_A \cdot h_{p-2} - k_A \cdot h_{p-1} - k_e \cdot h_{p-1} + k_e \cdot h_p}{\Delta z^2} = S_{sA} \cdot \frac{\partial h_{p-1}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{k_A \cdot h_{p-2} - (k_A + k_e) \cdot h_{p-1} + k_e \cdot h_p}{\Delta z^2} = S_{sA} \cdot \frac{\partial h_{p-1}}{\partial t}}$$

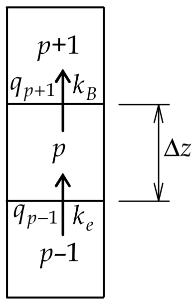
Em termos de excesso de poropressão:

$$\frac{k_A \cdot (ue_{p-2} / \gamma_w + h_w) - k_A \cdot (ue_{p-1} / \gamma_w + h_w) - k_e \cdot (ue_{p-1} / \gamma_w + h_w) + k_e \cdot (ue_p / \gamma_w + h_w)}{\Delta z} = \frac{S_{sA}}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial ue_{p-1}}{\partial t} \cdot \Delta z$$

$$\frac{k_A \cdot ue_{p-2} / \gamma_w - k_A \cdot ue_{p-1} / \gamma_w - k_e \cdot ue_{p-1} / \gamma_w + k_e \cdot ue_p / \gamma_w + k_A \cdot h_w - k_A \cdot h_w - k_e \cdot h_w + k_e \cdot h_w}{\Delta z} = m_{VA} \cdot \frac{\partial ue_{p-1}}{\partial t} \cdot \Delta z$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{k_A \cdot ue_{p-2} - (k_A + k_e) \cdot ue_{p-1} + k_e \cdot ue_p}{\Delta z^2} = \gamma_w \cdot m_{VA} \cdot \frac{\partial ue_{p-1}}{\partial t}}$$

Balanço de vazão hidráulica na célula superior da interface



Célula p:

$$\left[q_{p-1} \cdot A\right] = \left[q_{p+1} \cdot A\right] + \left[S_{sB} \cdot \Delta z \cdot A \cdot \frac{\partial h_p}{\partial t}\right]$$

Em termos de carga hidráulica:

$$[\div A] \quad \Rightarrow \quad \left(-k_e \cdot \frac{h_p - h_{p-1}}{\Delta z}\right) - \left(-k_B \cdot \frac{h_{p+1} - h_p}{\Delta z}\right) = S_{sB} \cdot \frac{\partial h_p}{\partial t} \cdot \Delta z$$

$$\frac{k_e \cdot h_{p-1} - k_e \cdot h_p - k_B \cdot h_p + k_B \cdot h_{p+1}}{\Delta z^2} = S_{sB} \cdot \frac{\partial u_p}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{k_e \cdot h_{p-1} - (k_e + k_B) \cdot h_p + k_B \cdot h_{p+1}}{\Delta z^2} = S_{sB} \cdot \frac{\partial h_p}{\partial t}}$$

Em termos de excesso de poropressão:

$$\frac{k_e \cdot (ue_{p-1} / \gamma_w + h_w) - k_e \cdot (ue_p / \gamma_w + h_w) - k_B \cdot (ue_p / \gamma_w + h_w) + k_B \cdot (ue_{p+1} / \gamma_w + h_w)}{\Delta z} = \frac{S_{sB}}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial ue_p}{\partial t} \cdot \Delta z$$

$$\frac{k_e \cdot ue_{p-1} / \gamma_w - k_e \cdot ue_p / \gamma_w - k_B \cdot ue_p / \gamma_w + k_B \cdot ue_{p+1} / \gamma_w + k_e \cdot h_w - k_e \cdot h_w - k_B \cdot h_w + k_B \cdot h_w}{\Delta z} = m_{VB} \cdot \frac{\partial ue_p}{\partial t} \cdot \Delta z$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{k_e \cdot ue_{p-1} - (k_e + k_B) \cdot ue_p + k_B \cdot ue_{p+1}}{\Delta z^2} = \gamma_w \cdot m_{VB} \cdot \frac{\partial ue_p}{\partial t}}$$

Solução explícita da resposta transiente

Em termos de carga hidráulica:

$\boxed{\lambda_A = \frac{r_A}{k_A} = \frac{1}{S_{sA}} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta z^2}}$ $\boxed{\lambda_B = \frac{r_B}{k_B} = \frac{1}{S_{sB}} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta z^2}}$

Célula $(i = 1) \rightarrow$

Carga hidráulica prescrita na base: $\boxed{h_1 = h_w}$

Camada impermeável na base: $\boxed{h_1^{m+1} = (1 - 2\lambda_A \cdot k_A) \cdot h_1^m + 2\lambda_A \cdot k_A \cdot h_2^m}$

Células $(i = 2 : p-2) \rightarrow$ $\boxed{h_i^{m+1} = \lambda_A \cdot k_A \cdot h_{i-1}^m + (1 - 2\lambda_A \cdot k_A) \cdot h_i^m + \lambda_A \cdot k_A \cdot h_{i+1}^m}$

Célula $(i = p-1) \rightarrow$

$$\frac{\partial h_{p-1}}{\partial t} \cong \frac{h_{p-1}^{m+1} - h_{p-1}^m}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad -S_{sA} \cdot \frac{h_{p-1}^{m+1}}{\Delta t} = -\frac{k_A \cdot h_{p-2}^m - (k_A + k_e) \cdot h_{p-1}^m + k_e \cdot h_p^m}{\Delta z^2} - S_{sA} \cdot \frac{h_{p-1}^m}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h_{p-1}^{m+1} = \lambda_A \cdot k_A \cdot h_{p-2}^m + [1 - \lambda_A \cdot (k_A + k_e)] \cdot h_{p-1}^m + \lambda_A \cdot k_e \cdot h_p^m}$$

Célula $(i = p) \rightarrow$

$$\frac{\partial h_p}{\partial t} \cong \frac{h_p^{m+1} - h_p^m}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad -S_{sB} \cdot \frac{h_p^{m+1}}{\Delta t} = -\frac{k_e \cdot h_{p-1}^m - (k_e + k_B) \cdot h_p^m + k_B \cdot h_{p+1}^m}{\Delta z^2} - S_{sB} \cdot \frac{h_p^m}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h_p^{m+1} = \lambda_B \cdot k_e \cdot h_{p-1}^m + [1 - \lambda_B \cdot (k_e + k_B)] \cdot h_p^m + \lambda_B \cdot k_B \cdot h_{p+1}^m}$$

Células $(i = p+1 : n-1) \rightarrow$ $\boxed{h_i^{m+1} = \lambda_B \cdot k_B \cdot h_{i-1}^m + (1 - 2\lambda_B \cdot k_B) \cdot h_i^m + \lambda_B \cdot k_B \cdot h_{i+1}^m}$

Célula $(i = n) \rightarrow$

Carga hidráulica prescrita no topo: $\boxed{h_n = h_w}$

Camada impermeável na base: $\boxed{h_n^{m+1} = 2\lambda_B \cdot k_B \cdot h_{n-1}^m + (1 - 2\lambda_B \cdot k_B) \cdot h_n^m}$

Em termos de excesso de poropressão:

$\boxed{\lambda_A = \frac{r_A}{k_A} = \frac{1}{S_{sA}} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta z^2} = \frac{1}{\gamma_w \cdot m_{VA}} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta z^2}}$ $\boxed{\lambda_B = \frac{r_B}{k_B} = \frac{1}{S_{sB}} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta z^2} = \frac{1}{\gamma_w \cdot m_{VB}} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta z^2}}$

Célula $(i = 1) \rightarrow$

Excesso de poropressão nulo na base: $\boxed{ue_1 = 0}$

Camada impermeável na base: $\boxed{ue_1^{m+1} = (1 - 2\lambda_A \cdot k_A) \cdot ue_1^m + 2\lambda_A \cdot k_A \cdot ue_2^m}$

Células $(i = 2 : p-2) \rightarrow$ $\boxed{ue_i^{m+1} = \lambda_A \cdot k_A \cdot ue_{i-1}^m + (1 - 2\lambda_A \cdot k_A) \cdot ue_i^m + \lambda_A \cdot k_A \cdot ue_{i+1}^m}$

Célula $(i = p-1) \rightarrow$

$$\frac{\partial ue_{p-1}}{\partial t} \cong \frac{ue_{p-1}^{m+1} - ue_{p-1}^m}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad -\gamma_w \cdot m_{VA} \cdot \frac{ue_{p-1}^{m+1}}{\Delta t} = -\frac{k_A \cdot ue_{p-2}^m - (k_A + k_e) \cdot ue_{p-1}^m + k_e \cdot ue_p^m}{\Delta z^2} - \gamma_w \cdot m_{VA} \cdot \frac{ue_{p-1}^m}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{ue_{p-1}^{m+1} = \lambda_A \cdot k_A \cdot ue_{p-2}^m + [1 - \lambda_A \cdot (k_A + k_e)] \cdot ue_{p-1}^m + \lambda_A \cdot k_e \cdot ue_p^m}$$

Célula $(i = p) \rightarrow$

$$\frac{\partial ue_p}{\partial t} \cong \frac{ue_p^{m+1} - ue_p^m}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad -\gamma_w \cdot m_{VB} \cdot \frac{ue_p^{m+1}}{\Delta t} = -\frac{k_e \cdot ue_{p-1}^m - (k_e + k_B) \cdot ue_p^m + k_B \cdot ue_{p+1}^m}{\Delta z^2} - \gamma_w \cdot m_{VB} \cdot \frac{ue_p^m}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{ue_p^{m+1} = \lambda_B \cdot k_e \cdot ue_{p-1}^m + [1 - \lambda_B \cdot (k_e + k_B)] \cdot ue_p^m + \lambda_B \cdot k_B \cdot ue_{p+1}^m}$$

Células $(i = p+1 : n-1) \rightarrow$ $\boxed{ue_i^{m+1} = \lambda_B \cdot k_B \cdot ue_{i-1}^m + (1 - 2\lambda_B \cdot k_B) \cdot ue_i^m + \lambda_B \cdot k_B \cdot ue_{i+1}^m}$

Célula $(i = n) \rightarrow$

Excesso de poropressão nulo no topo: $\boxed{ue_n = 0}$

Camada impermeável na base: $\boxed{ue_n^{m+1} = 2\lambda_B \cdot k_B \cdot ue_{n-1}^m + (1 - 2\lambda_B \cdot k_B) \cdot ue_n^m}$

Solução implícita da resposta transiente: Método de Crank-Nicolson

Em termos de carga hidráulica:

$$\boxed{\lambda_A = \frac{r_A}{k_A} = \frac{1}{S_{sA}} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta z^2}} \qquad \boxed{\lambda_B = \frac{r_B}{k_B} = \frac{1}{S_{sB}} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta z^2}}$$

Célula $(i=1) \rightarrow \boxed{h_1 = h_w}$ ou $\boxed{\left(2k_A + \frac{2}{\lambda_A}\right)h_1^{m+1} - 2k_A \cdot h_2^{m+1} = \left(\frac{2}{\lambda_A} - 2k_A\right)h_1^m + 2k_A \cdot h_2^m}$

Células $(i=2:p-2) \rightarrow \boxed{-k_A \cdot h_{i-1}^{m+1} + \left[2k_A + \frac{2}{\lambda_A}\right] \cdot h_i^{m+1} - k_A \cdot h_{i+1}^{m+1} = k_A \cdot h_{i-1}^m + \left[\frac{2}{\lambda_A} - 2k_A\right] \cdot h_i^m + k_A \cdot h_{i+1}^m}$

Célula $(i=p-1) \rightarrow \boxed{-k_A \cdot h_{p-2}^{m+1} + \left[(k_A + k_e) + \frac{2}{\lambda_A}\right] \cdot h_{p-1}^{m+1} - k_e \cdot h_p^{m+1} = k_A \cdot h_{p-2}^m + \left[\frac{2}{\lambda_A} - (k_A + k_e)\right] \cdot h_{p-1}^m + k_e \cdot h_p^m}$

Célula $(i=p) \rightarrow \boxed{-k_e \cdot h_{p-1}^{m+1} + \left[(k_e + k_B) + \frac{2}{\lambda_B}\right] \cdot h_p^{m+1} - k_B \cdot h_{p+1}^{m+1} = k_e \cdot h_{p-1}^m + \left[\frac{2}{\lambda_B} - (k_e + k_B)\right] \cdot h_p^m + k_B \cdot h_{p+1}^m}$

Células $(i=p+1:n-1) \rightarrow \boxed{-k_B \cdot h_{i-1}^{m+1} + \left[2k_B + \frac{2}{\lambda_B}\right] \cdot h_i^{m+1} - k_B \cdot h_{i+1}^{m+1} = k_B \cdot h_{i-1}^m + \left[\frac{2}{\lambda_B} - 2k_B\right] \cdot h_i^m + k_B \cdot h_{i+1}^m}$

Célula $(i=n) \rightarrow \boxed{h_n = h_w}$ ou $\boxed{-2k_B \cdot h_{n-1}^{m+1} + \left(2k_B + \frac{2}{\lambda_B}\right)h_n^{m+1} = 2k_B \cdot h_{n-1}^m + \left(\frac{2}{\lambda_B} - 2k_B\right)h_n^m}$

Em termos de excesso de poropressão:

$$\boxed{\lambda_A = \frac{r_A}{k_A} = \frac{1}{S_{sA}} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta z^2} = \frac{1}{\gamma_w \cdot m_{VA}} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta z^2}} \qquad \boxed{\lambda_B = \frac{r_B}{k_B} = \frac{1}{S_{sB}} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta z^2} = \frac{1}{\gamma_w \cdot m_{VB}} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta z^2}}$$

Célula $(i=1) \rightarrow \boxed{ue_1 = 0}$ ou $\boxed{\left(2k_A + \frac{2}{\lambda_A}\right)ue_1^{m+1} - 2k_A \cdot ue_2^{m+1} = \left(\frac{2}{\lambda_A} - 2k_A\right)ue_1^m + 2k_A \cdot ue_2^m}$

Células $(i=2:p-2) \rightarrow \boxed{-k_A \cdot ue_{i-1}^{m+1} + \left[2k_A + \frac{2}{\lambda_A}\right] \cdot ue_i^{m+1} - k_A \cdot ue_{i+1}^{m+1} = k_A \cdot ue_{i-1}^m + \left[\frac{2}{\lambda_A} - 2k_A\right] \cdot ue_i^m + k_A \cdot ue_{i+1}^m}$

Célula $(i=p-1) \rightarrow \boxed{-k_A \cdot ue_{p-2}^{m+1} + \left[(k_A + k_e) + \frac{2}{\lambda_A}\right] \cdot ue_{p-1}^{m+1} - k_e \cdot ue_p^{m+1} = k_A \cdot ue_{p-2}^m + \left[\frac{2}{\lambda_A} - (k_A + k_e)\right] \cdot ue_{p-1}^m + k_e \cdot ue_p^m}$

Célula $(i=p) \rightarrow \boxed{-k_e \cdot ue_{p-1}^{m+1} + \left[(k_e + k_B) + \frac{2}{\lambda_B}\right] \cdot ue_p^{m+1} - k_B \cdot ue_{p+1}^{m+1} = k_e \cdot ue_{p-1}^m + \left[\frac{2}{\lambda_B} - (k_e + k_B)\right] \cdot ue_p^m + k_B \cdot ue_{p+1}^m}$

Células $(i=p+1:n-1) \rightarrow \boxed{-k_B \cdot ue_{i-1}^{m+1} + \left[2k_B + \frac{2}{\lambda_B}\right] \cdot ue_i^{m+1} - k_B \cdot ue_{i+1}^{m+1} = k_B \cdot ue_{i-1}^m + \left[\frac{2}{\lambda_B} - 2k_B\right] \cdot ue_i^m + k_B \cdot ue_{i+1}^m}$

Célula $(i=n) \rightarrow \boxed{ue_n = 0}$ ou $\boxed{-2k_B \cdot ue_{n-1}^{m+1} + \left(2k_B + \frac{2}{\lambda_B}\right)ue_n^{m+1} = 2k_B \cdot ue_{n-1}^m + \left(\frac{2}{\lambda_B} - 2k_B\right)ue_n^m}$