CIV 2552 – Métodos Numéricos em Problemas de Fluxo e Transporte em Meios Porosos

Fluxo hidráulico em meios porosos – modelo unidimensional

Formulação por Volume de Controle em Diferenças Finitas

Parâmetros do modelo

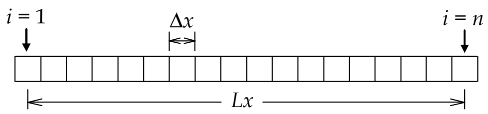
$h \rightarrow$ carga hidráulica [L]
$k \rightarrow$ permeabilidade do meio [L/T]
$S_s \rightarrow$ armazenamento específico (*specific storage*) do meio poroso [1/L]
$A \rightarrow$ área da seção transversal do canal do fluxo [L^2]
$Lx \rightarrow$ comprimento do modelo [L]

Lei de Darcy

$q = -k \cdot dh/dx \rightarrow$ fluxo hidráulico [L/T]

Parâmetros de discretização

$n \rightarrow$ número de pontos (células) do modelo unidimensional
$\Delta x = Lx/(n-1) \rightarrow$ comprimento da célula na direção x [L]
($Lx \rightarrow$ do centro da primeira célula para centro da última célula)



Condições de contorno

$h(x{=}0) = hl \rightarrow$ carga hidráulica prescrita no bordo esquerdo
ou
$q(x{=}0) = ql \rightarrow$ fluxo prescrito no bordo esquerdo

$h(x{=}L) = hr \rightarrow$ carga hidráulica prescrita no bordo direito
ou
$q(x{=}Lx) = qr \rightarrow$ fluxo prescrito no bordo direito

Fonte externa

$s \rightarrow$ fonte externa de vazão hidráulica distribuída por comprimento de canal [L^2/T]
(a fonte pode ser pontual, mas na dedução ela será considerada distribuída)

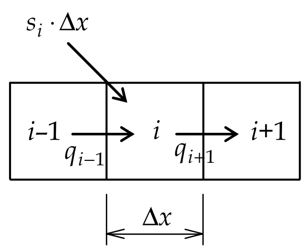
Balanço de vazão hidráulica em uma célula

(a célula é um volume de controle; convenção: vazão que entra na célula é positivo)

[*Vazão que entra na célula*] = [*Vazão que sai da célula*] + [*Vazão retida dentro da célula*]

$$\left[q_{i-1} \cdot A + s_i \cdot \Delta x\right] = \left[q_{i+1} \cdot A\right] + \left[S_s \cdot \Delta x \cdot A \cdot \frac{\partial h_i}{\partial t}\right]$$

$$q_{i-1} \cdot A - q_{i+1} \cdot A = S_s \cdot \Delta x \cdot A \cdot \frac{\partial h_i}{\partial t} - s_i \cdot \Delta x$$



Usando a Lei de Darcy e a aproximação de derivada em diferenças finitas:
$\left(q \cong -k \cdot \Delta h/\Delta x\right)$

$$\left(-k\cdot A\cdot\frac{h_i-h_{i-1}}{\Delta x}\right)-\left(-k\cdot A\cdot\frac{h_{i+1}-h_i}{\Delta x}\right)=S_s\cdot\frac{\partial h_i}{\partial t}\cdot\Delta x\cdot A-s_i\cdot\Delta x$$

$$[\times 1/(\Delta x\cdot k\cdot A)] \;\Rightarrow\; \frac{h_{i-1}-2h_i+h_{i+1}}{\Delta x^2}=\frac{S_s}{k}\cdot\frac{\partial h_i}{\partial t}-\frac{s_i}{k\cdot A}$$

$$\Rightarrow\; \boxed{\frac{h_{i-1}-2h_i+h_{i+1}}{\Delta x^2}=\frac{S_s}{k}\cdot\frac{\partial h_i}{\partial t}-\frac{s_i}{k\cdot A}}$$

Solução explícita da resposta transiente

Considerando que os valores de carga hidráulica em todos os pontos são conhecidos em um passo de tempo genérico (m), a aproximação da resposta para o passo seguinte de tempo (m+1) na solução explícita é tal que cada valor h_i^{m+1} só depende de valores do passo anterior. Isso resulta em:

$$\frac{\partial h_i}{\partial t}\cong\frac{h_i^{m+1}-h_i^m}{\Delta t} \;\Rightarrow\; -\frac{S_s}{k}\cdot\frac{h_i^{m+1}}{\Delta t}=-\frac{h_{i-1}^m-2h_i^m+h_{i+1}^m}{\Delta x^2}-\frac{S_s}{k}\cdot\frac{h_i^m}{\Delta t}-\frac{s_i^m}{k\cdot A}$$

$$\left[\times\left(-{}^{k}\!/\!_{S_s}\cdot\Delta t\right)\right] \;\Rightarrow\; (i=2:n-1)\;\rightarrow\; h_i^{m+1}=h_i^m+\frac{k}{S_s}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\cdot\left(h_{i-1}^m-2h_i^m+h_{i+1}^m\right)+\frac{\Delta t}{S_s\cdot A}\cdot s_i^m$$

Sendo $\boxed{r=\frac{k}{S_s}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x^2}}$ $\Rightarrow$ Células $(i=2:n-1)\;\rightarrow\;\boxed{h_i^{m+1}=r\cdot h_{i-1}^m+(1-2r)\cdot h_i^m+r\cdot h_{i+1}^m+\frac{\Delta t}{S_s\cdot A}\cdot s_i^m}$

Condições de contorno do tipo Dirichlet

Célula $(i=1)\;\rightarrow\;\boxed{h_1=hl}$

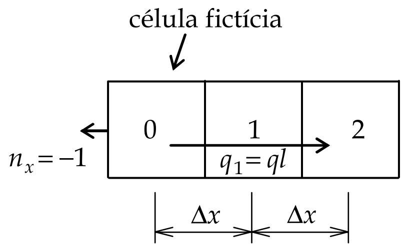
Célula $(i=n)\;\rightarrow\;\boxed{h_n=hr}$

Condições de contorno do tipo Neuman

Célula $(i=1)$:

$$q=-k\cdot\frac{dh}{dx}\cdot n_x\;\rightarrow\; q_1\cong -k\cdot\frac{h_2-h_0}{2\Delta x}\cdot(-1)=ql\;\rightarrow\; h_0=h_2-ql\cdot\frac{2\Delta x}{k}$$

$$h_1^{m+1}=r\cdot h_0^m+(1-2r)\cdot h_1^m+r\cdot h_2^m+\frac{\Delta t}{S_s\cdot A}\cdot s_1^m\;\Rightarrow$$

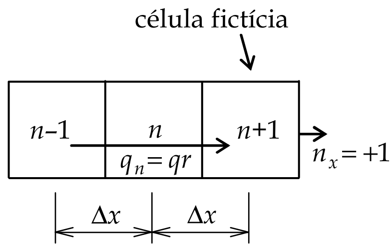


Célula $(i=1)\;\rightarrow\;\boxed{h_1^{m+1}=(1-2r)\cdot h_1^m+2r\cdot h_2^m+\frac{\Delta t}{S_s\cdot A}\cdot s_1^m-ql\cdot\frac{r\cdot 2\Delta x}{k}}$

Célula $(i=n)$:

$$q=-k\cdot\frac{dh}{dx}\cdot n_x\;\rightarrow\; q_n\cong -k\cdot\frac{h_{n+1}-h_{n-1}}{2\Delta x}\cdot(+1)=qr\;\rightarrow\; h_{n+1}=h_{n-1}-qr\cdot\frac{2\Delta x}{k}$$

$$h_n^{m+1}=r\cdot h_{n-1}^m+(1-2r)\cdot h_n^m+r\cdot h_{n+1}^m+\frac{\Delta t}{S_s\cdot A}\cdot s_n^m\;\Rightarrow$$



Célula $(i=n)\;\rightarrow\;\boxed{h_n^{m+1}=2r\cdot h_{n-1}^m+(1-2r)\cdot h_n^m+\frac{\Delta t}{S_s\cdot A}\cdot s_n^m-qr\cdot\frac{r\cdot 2\Delta x}{k}}$

Solução implícita da resposta transiente: Método de Crank-Nicolson

A aproximação em diferenças finitas da segunda derivada da carga hidráulica em relação a x é considerada como uma média de valores calculados no passo de tempo (m) e no passo seguinte de tempo (m+1):

$$\frac{1}{2}\left[\frac{h_{i-1}-2h_i+h_{i+1}}{\Delta x^2}\right]^m+\frac{1}{2}\left[\frac{h_{i-1}-2h_i+h_{i+1}}{\Delta x^2}\right]^{m+1}=\frac{S_s}{k}\cdot\frac{h_i^{m+1}-h_i^m}{\Delta t}-\frac{s_i^m}{k\cdot A}\quad\rightarrow$$

$$\left[\times\Delta x^2\right]\;\Rightarrow\;\frac{h_{i-1}^{m+1}-2h_i^{m+1}+h_{i+1}^{m+1}}{2}-\frac{S_s}{k}\cdot\frac{h_i^{m+1}}{\Delta t}\cdot\Delta x^2=-\frac{h_{i-1}^{m}-2h_i^{m}+h_{i+1}^{m}}{2}-\frac{S_s}{k}\cdot\frac{h_i^{m}}{\Delta t}\cdot\Delta x^2-\frac{s_i^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2$$

$$\boxed{r=\frac{k}{S_s}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x^2}}\;\Rightarrow\;\text{Células }\;(i=2:n-1)\;\rightarrow\;\boxed{-h_{i-1}^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)h_i^{m+1}-h_{i+1}^{m+1}=h_{i-1}^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)h_i^m+h_{i+1}^m+2\frac{s_i^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2}$$

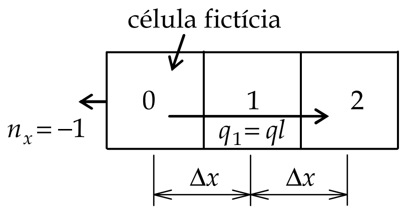
Condições de contorno do tipo Dirichlet

Célula $(i=1)\;\rightarrow\;\boxed{h_1=hl}$

Célula $(i=n)\;\rightarrow\;\boxed{h_n=hr}$

Condições de contorno do tipo Neuman

Célula $(i=1)$:



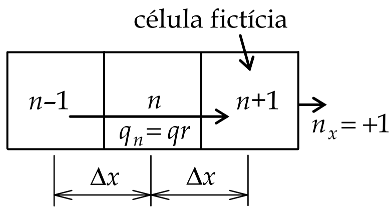
$$q=-k\cdot\frac{dh}{dx}\cdot n_x\;\rightarrow\;q_1\cong-k\cdot\frac{h_2-h_0}{2\Delta x}\cdot(-1)=ql\;\rightarrow\;h_0=h_2-ql\cdot\frac{2\Delta x}{k}$$

$$-h_0^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)h_1^{m+1}-h_2^{m+1}=h_0^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)h_1^m+h_2^m+2\frac{s_1^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2$$

$$\Rightarrow\;-\left(h_2^{m+1}-ql\cdot\frac{2\Delta x}{k}\right)+\left(2+\frac{2}{r}\right)h_1^{m+1}-h_2^{m+1}=\left(h_2^m-ql\cdot\frac{2\Delta x}{k}\right)+\left(\frac{2}{r}-2\right)h_1^m+h_2^m+2\frac{s_1^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2$$

Célula $(i=1)\;\rightarrow\;\boxed{\left(2+\frac{2}{r}\right)h_1^{m+1}-2h_2^{m+1}=\left(\frac{2}{r}-2\right)h_1^m+2h_2^m+2\frac{s_1^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2-ql\cdot\frac{4\Delta x}{k}}$

Célula $(i=n)$:



$$q=-k\cdot\frac{dh}{dx}\cdot n_x\;\rightarrow\;q_n\cong-k\cdot\frac{h_{n+1}-h_{n-1}}{2\Delta x}\cdot(+1)=qr\;\rightarrow\;h_{n+1}=h_{n-1}-qr\cdot\frac{2\Delta x}{k}$$

$$-h_{n-1}^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)h_n^{m+1}-h_{n+1}^{m+1}=h_{n-1}^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)h_n^m+h_{n+1}^m+2\frac{s_i^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2$$

$$\Rightarrow\;-h_{n-1}^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)h_n^{m+1}-\left(h_{n-1}^{m+1}-qr\cdot\frac{2\Delta x}{k}\right)=h_{n-1}^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)h_n^m+\left(h_{n-1}^m-qr\cdot\frac{2\Delta x}{k}\right)+2\frac{s_n^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2$$

Célula $(i=n)\;\rightarrow\;\boxed{-2h_{n-1}^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)h_n^{m+1}=2h_{n-1}^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)h_n^m+2\frac{s_n^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2-qr\cdot\frac{4\Delta x}{k}}$