

# CIV 2552 – Métodos Numéricos em Problemas de Fluxo e Transporte em Meios Porosos

## Fluxo hidráulico em meios porosos – modelo bidimensional

### Formulação por Volume de Controle em Diferenças Finitas – Técnica de Direções Alternadas

#### Parâmetros do modelo

$h$  → carga hidráulica [L]

$k$  → permeabilidade do meio (considerado meio homogêneo) [L/T]

$S_s$  → armazenamento específico (*specific storage*) do meio poroso [1/L]

$e$  → espessura do meio bidimensional [L]

$L_x$  → dimensão do modelo na direção horizontal  $x$  [L]

$L_y$  → dimensão do modelo na direção horizontal  $y$  [L]

#### Lei de Darcy

$q_x = -k \cdot \partial h / \partial x$  → fluxo hidráulico na direção  $x$  [L/T]

$q_y = -k \cdot \partial h / \partial y$  → fluxo hidráulico na direção  $y$  [L/T]

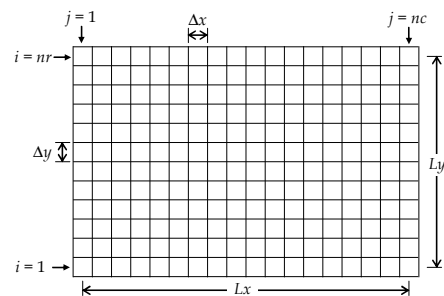
#### Parâmetros da malha

$nr$  → número de linhas (*rows*) do *grid*

$nc$  → número de colunas do *grid*

$\Delta x = L_x / (nc - 1)$  → tamanho do lado da célula na direção  $x$  [L]

$\Delta y = L_y / (nr - 1)$  → tamanho do lado da célula na direção  $y$  [L]



#### Condições de contorno

$h(x=0,y) = hl$  → carga hidráulica prescrita no bordo esquerdo; ou  
 $q_x(x=0,y) = ql$  → fluxo prescrita no bordo esquerdo

$h(x=L_x,y) = hr$  → carga hidráulica prescrita no bordo direito; ou  
 $q_x(x=L_x,y) = qr$  → fluxo prescrita no bordo direito

$h(x,y=0) = hb$  → carga hidráulica prescrita no bordo inferior; ou  
 $q_y(x,y=0) = qb$  → fluxo prescrita no bordo inferior

$h(x,y=L_y) = ht$  → carga hidráulica prescrita no bordo superior; ou  
 $q_y(x,y=L_y) = qt$  → fluxo prescrita no bordo superior

#### Fonte externa

$s$  → fonte externa de vazão hidráulica distribuída por área [L/T]

(a fonte pode ser pontual, mas na dedução ela será considerada distribuída)

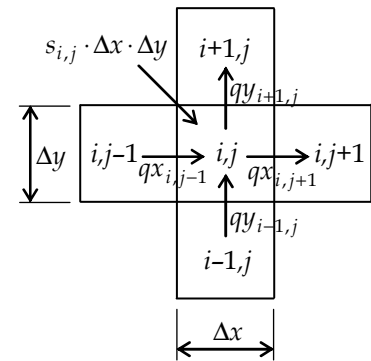
#### Balço de vazão hidráulica em uma célula

(a célula é um volume de controle; convenção: vazão que entra na célula é positivo)

$$[\text{Vazão que entra na célula}] = [\text{Vazão que sai da célula}] + [\text{Vazão retida dentro da célula}]$$

$$\begin{aligned}
 & [qx_{i,j-1} \cdot \Delta y \cdot e + qy_{i-1,j} \cdot \Delta x \cdot e + s_{i,j} \cdot \Delta x \cdot \Delta y] = \\
 & [qx_{i,j+1} \cdot \Delta y \cdot e + qy_{i+1,j} \cdot \Delta x \cdot e] + \left[ S_s \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot e \cdot \frac{\partial h_{i,j}}{\partial t} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & qx_{i,j-1} \cdot \Delta y \cdot e - qx_{i,j+1} \cdot \Delta y \cdot e + qy_{i-1,j} \cdot \Delta x \cdot e - qy_{i+1,j} \cdot \Delta x \cdot e = \\
 & S_s \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot e \cdot \frac{\partial h_{i,j}}{\partial t} - s_{i,j} \cdot \Delta x \cdot \Delta y
 \end{aligned}$$



Usando a Lei de Darcy e a aproximação de derivadas em diferenças finitas:

$$(qx \cong -k \cdot \Delta h / \Delta x; \quad qy \cong -k \cdot \Delta h / \Delta y)$$

$$\begin{aligned}
 & \left( -k \cdot \Delta y \cdot e \cdot \frac{h_{i,j} - h_{i,j-1}}{\Delta x} \right) - \left( -k \cdot \Delta y \cdot e \cdot \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j}}{\Delta x} \right) + \left( -k \cdot \Delta x \cdot e \cdot \frac{h_{i,j} - h_{i-1,j}}{\Delta y} \right) - \left( -k \cdot \Delta x \cdot e \cdot \frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{\Delta y} \right) = \\
 & S_s \cdot \frac{\partial h_{i,j}}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot e - s_{i,j} \cdot \Delta x \cdot \Delta y
 \end{aligned}$$

$$[\div (k \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot e)] \Rightarrow \boxed{\frac{h_{i,j-1} - 2h_{i,j} + h_{i,j+1}}{\Delta x^2} + \frac{h_{i-1,j} - 2h_{i,j} + h_{i+1,j}}{\Delta y^2} = \frac{S_s}{k} \cdot \frac{\partial h_{i,j}}{\partial t} - \frac{s_{i,j}}{k \cdot e}}$$

## Solução implícita da resposta transiente

Considerando que os valores de temperatura em todos os pontos são conhecidos em um passo de tempo genérico ( $m$ ), a aproximação da solução para o passo seguinte de tempo ( $m+1$ ) resulta em um sistema de equações para solução no passo  $m+1$ , cuja matriz de coeficientes tem um formato “penta-diagonal” simétrico:

$$\begin{bmatrix}
 X & X & X & & & & & & & & \\
 X & X & X & X & & & & & & & \\
 X & X & X & X & X & & & & & & \\
 & X & X & X & X & X & & & & & \\
 & & X & X & X & X & X & & & & \\
 & & & X & X & X & X & X & & & \\
 & & & & X & X & X & X & X & & \\
 & & & & & X & X & X & X & X & \\
 & & & & & & X & X & X & X & X \\
 & & & & & & & X & X & X & X \\
 & & & & & & & & X & X & X \\
 & & & & & & & & & X & X \\
 & & & & & & & & & & X \\
 & & & & & & & & & & X \\
 & & & & & & & & & & X \\
 & & & & & & & & & & X \\
 & & & & & & & & & & X
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 h_{i-1,j}^{m+1} \\
 h_{i,j-1}^{m+1} \\
 h_{i,j}^{m+1} \\
 h_{i,j+1}^{m+1} \\
 h_{i+1,j}^{m+1} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 X \\
 X \\
 X \\
 X \\
 X \\
 X \\
 X \\
 X \\
 X \\
 X \\
 X \\
 X \\
 X \\
 X \\
 X \\
 X \\
 X \\
 X \\
 X \\
 X \\
 X
 \end{bmatrix}$$

Esse sistema pode ser resolvido por métodos diretos (eliminação de Gauss, método de Cholesky, etc.) ou por métodos iterativos. Essa solução pode ser lenta do ponto de vista computacional se a malha for muito grande. Uma alternativa é a Técnica de Direções Alternadas que vai ser mostrada a seguir.



$$(i = 2 : nr - 1) \quad (j = nc) \rightarrow -2h_{i,nc-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot h_{i,nc}^{m+1} = f_x \cdot h_{i-1,nc}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot h_{i,nc}^m + f_x \cdot h_{i+1,nc}^m + \frac{S_{i,nc}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

## 1.2 – Solução da linha inferior ( $i = 1$ )

### 1.2.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo inferior

$$(i = 1) \quad (j = 1 : nc) \rightarrow h_{1,j} = hb$$

### 1.2.2 – Condição de contorno de fluxo prescrita no bordo inferior

$$qy = -k \cdot \frac{dh}{dy} \cdot n_y \rightarrow qy_{1,j} \cong -k \cdot \frac{h_{2,j} - h_{0,j}}{2\Delta y} \cdot (-1) = qb \rightarrow h_{0,j} = h_{2,j} - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

$$-h_{1,j-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot h_{1,j}^{m+1} - h_{1,j+1}^{m+1} = f_x \cdot h_{0,j}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot h_{1,j}^m + f_x \cdot h_{2,j}^m + \frac{S_{1,j}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 \Rightarrow$$

$$-h_{1,j-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot h_{1,j}^{m+1} - h_{1,j+1}^{m+1} = f_x \cdot \left(h_{2,j}^m - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}\right) + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot h_{1,j}^m + f_x \cdot h_{2,j}^m + \frac{S_{1,j}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 \Rightarrow$$

$$(i = 1) \quad (j = 2 : nc - 1) \rightarrow -h_{1,j-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot h_{1,j}^{m+1} - h_{1,j+1}^{m+1} = \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot h_{1,j}^m + 2f_x \cdot h_{2,j}^m + \frac{S_{1,j}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qb \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

### 1.2.2.1 – Condições de contorno no bordo esquerdo

#### 1.2.2.1.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo esquerdo

$$(i = 1) \quad (j = 1) \rightarrow h_{1,1} = hl$$

#### 1.2.2.1.2 – Condição de contorno de fluxo prescrita no bordo esquerdo

$$qx = -k \cdot \frac{dh}{dx} \cdot n_x \rightarrow qx_{1,1} \cong -k \cdot \frac{h_{1,2} - h_{1,0}}{2\Delta x} \cdot (-1) = ql \rightarrow h_{1,0} = h_{1,2} - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

$$-h_{1,0}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot h_{1,1}^{m+1} - h_{1,2}^{m+1} = \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot h_{1,1}^m + 2f_x \cdot h_{2,1}^m + \frac{S_{1,1}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qb \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} \Rightarrow$$

$$-\left(h_{1,2}^{m+1} - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}\right) + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot h_{1,1}^{m+1} - h_{1,2}^{m+1} = \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot h_{1,1}^m + 2f_x \cdot h_{2,1}^m + \frac{S_{1,1}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qb \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} \Rightarrow$$

$$(i = 1) \quad (j = 1) \rightarrow \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot h_{1,1}^{m+1} - 2h_{1,2}^{m+1} = \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot h_{1,1}^m + 2f_x \cdot h_{2,1}^m + \frac{S_{1,1}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qb \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

### 1.2.2.2 – Condições de contorno no bordo direito

#### 1.2.2.2.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo direito

$$(i = 1) \quad (j = nc) \rightarrow h_{1,nc} = hr$$

#### 1.2.2.2.2 – Condição de contorno de fluxo prescrita no bordo direito

$$qx = -k \cdot \frac{dh}{dx} \cdot n_x \rightarrow qx_{1,nc} \cong -k \cdot \frac{h_{1,nc+1} - h_{1,nc-1}}{2\Delta x} \cdot (+1) = qr \rightarrow h_{1,nc+1} = h_{1,nc-1} - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

$$-h_{1,nc-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot h_{1,nc}^{m+1} - h_{1,nc+1}^{m+1} = \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot h_{1,nc}^m + 2f_x \cdot h_{2,nc}^m + \frac{S_{1,nc}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qb \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} \Rightarrow$$

$$-h_{1,nc-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot h_{1,nc}^{m+1} - \left(h_{1,nc-1}^{m+1} - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}\right) = \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot h_{1,nc}^m + 2f_x \cdot h_{2,nc}^m + \frac{S_{1,nc}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qb \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} \Rightarrow$$

$$(i = 1) \quad (j = nc) \rightarrow -2h_{1,nc-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot h_{1,nc}^{m+1} = \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot h_{1,nc}^m + 2f_x \cdot h_{2,nc}^m + \frac{S_{1,nc}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qb \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

### 1.3 – Solução da linha superior ( $i = nr$ )

#### 1.3.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo superior

$$(i = nr) \quad (j = 1 : nc) \rightarrow h_{nr,j} = ht$$

#### 1.3.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo superior

$$qy = -k \cdot \frac{dh}{dy} \cdot n_y \rightarrow qy_{nr,j} \cong -k \cdot \frac{h_{nr+1,j} - h_{nr-1,j}}{2\Delta y} \cdot (+1) = qt \rightarrow h_{nr+1,j} = h_{nr-1,j} - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

$$-h_{nr,j-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot h_{nr,j}^{m+1} - h_{nr,j+1}^{m+1} = f_x \cdot h_{nr-1,j}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot h_{nr,j}^m + f_x \cdot h_{nr+1,j}^m + \frac{S_{nr,j}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 \Rightarrow$$

$$-h_{nr,j-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot h_{nr,j}^{m+1} - h_{nr,j+1}^{m+1} = f_x \cdot h_{nr-1,j}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot h_{nr,j}^m + f_x \cdot \left(h_{nr-1,j}^m - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}\right) + \frac{S_{nr,j}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 \Rightarrow$$

$$(i = nr) \quad (j = 2 : nc - 1) \rightarrow -h_{nr,j-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot h_{nr,j}^{m+1} - h_{nr,j+1}^{m+1} = 2f_x \cdot h_{nr-1,j}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot h_{nr,j}^m + \frac{S_{nr,j}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qt \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

#### 1.3.2.1 – Condições de contorno no bordo esquerdo

##### 1.3.2.1.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo esquerdo

$$(i = nr) \quad (j = 1) \rightarrow h_{nr,1} = hl$$

##### 1.3.2.1.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo esquerdo

$$qx = -k \cdot \frac{dh}{dx} \cdot n_x \rightarrow qx_{nr,1} \cong -k \cdot \frac{h_{nr,2} - h_{nr,0}}{2\Delta x} \cdot (-1) = ql \rightarrow h_{nr,0} = h_{nr,2} - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

$$-h_{nr,0}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot h_{nr,1}^{m+1} - h_{nr,2}^{m+1} = 2f_x \cdot h_{nr-1,1}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot h_{nr,1}^m + \frac{S_{nr,1}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qt \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} \Rightarrow$$

$$-\left(h_{nr,2}^{m+1} - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}\right) + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot h_{nr,1}^{m+1} - h_{nr,2}^{m+1} = 2f_x \cdot h_{nr-1,1}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot h_{nr,1}^m + \frac{S_{nr,1}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qt \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} \Rightarrow$$

$$(i = nr) \quad (j = 1) \rightarrow \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot h_{nr,1}^{m+1} - 2h_{nr,2}^{m+1} = 2f_x \cdot h_{nr-1,1}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot h_{nr,1}^m + \frac{S_{nr,1}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qt \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

#### 1.3.2.2 – Condições de contorno no bordo direito

##### 1.3.2.2.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo direito

$$(i = nr) \quad (j = nc) \rightarrow h_{nr,nc} = hr$$

##### 1.3.2.2.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo direito

$$qx = -k \cdot \frac{dh}{dx} \cdot n_x \rightarrow qx_{nr,nc} \cong -k \cdot \frac{h_{nr,nc+1} - h_{nr,nc-1}}{2\Delta x} \cdot (+1) = qr \rightarrow h_{nr,nc+1} = h_{nr,nc-1} - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

$$-h_{nr,nc-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot h_{nr,nc}^{m+1} - h_{nr,nc+1}^{m+1} = 2f_x \cdot h_{nr-1,nc}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot h_{nr,nc}^m + \frac{S_{nr,nc}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qt \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} \Rightarrow$$

$$-h_{nr,nc-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot h_{nr,nc}^{m+1} - \left(h_{nr,nc-1}^{m+1} - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}\right) = 2f_x \cdot h_{nr-1,nc}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot h_{nr,nc}^m + \frac{S_{nr,nc}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qt \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} \Rightarrow$$

$$(i = nr) \quad (j = nc) \rightarrow -2h_{nr,nc-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot h_{nr,nc}^{m+1} = 2f_x \cdot h_{nr-1,nc}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot h_{nr,nc}^m + \frac{S_{nr,nc}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qt \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

## 2 – Resolvendo em $y$ (segundo sub-passo no tempo $m+2$ )

$$\frac{h_{i,j-1}^{m+1} - 2h_{i,j}^{m+1} + h_{i,j+1}^{m+1}}{\Delta x^2} + \frac{h_{i-1,j}^{m+2} - 2h_{i,j}^{m+2} + h_{i+1,j}^{m+2}}{\Delta y^2} = \frac{S_s}{k} \cdot \frac{h_{i,j}^{m+2}}{\Delta t} - \frac{S_s}{k} \cdot \frac{h_{i,j}^{m+1}}{\Delta t} - \frac{S_{i,j}^{m+1}}{k \cdot e}$$

$\uparrow$      $\uparrow$      $\uparrow$   
 considerado igual                          desconhecido                          desconhecido  
 ao do sub - passo anterior

$$\Rightarrow h_{i-1,j}^{m+2} - 2h_{i,j}^{m+2} + h_{i+1,j}^{m+2} - \frac{S_s}{k} \cdot \frac{h_{i,j}^{m+2}}{\Delta t} \cdot \Delta y^2 = -\frac{(h_{i,j-1}^{m+1} - 2h_{i,j}^{m+1} + h_{i,j+1}^{m+1})}{\Delta x^2} \cdot \Delta y^2 - \frac{S_s}{k} \cdot \frac{h_{i,j}^{m+1}}{\Delta t} \cdot \Delta y^2 - \frac{S_{i,j}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2$$

### 2.1 – Solução da coluna genérica ( $j = 2:nc-1$ )

#### 2.1.1 – Caso geral (células do interior da coluna)

Adotando  $r_y = \frac{k}{S_s} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$ ,  $f_y = \frac{1}{f_x} = \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}$  e  $[-1]$   $\Rightarrow$

$$(i = 2 : nr - 1) (j = 2 : nc - 1) \rightarrow -h_{i-1,j}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{i,j}^{m+2} - h_{i+1,j}^{m+2} = f_y \cdot h_{i,j-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{i,j}^{m+1} + f_y \cdot h_{i,j+1}^{m+1} + \frac{S_{i,j}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2$$

#### 2.1.2 – Condições de contorno no bordo inferior

##### 2.1.2.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo inferior

$$(i = 1) (j = 2 : nc - 1) \rightarrow h_{1,j} = hb$$

##### 2.1.2.2 – Condição de contorno de fluxo prescrita no bordo inferior

$$qy = -k \cdot \frac{dh}{dy} \cdot n_y \rightarrow qy_{1,j} \equiv -k \cdot \frac{h_{2,j} - h_{0,j}}{2\Delta y} \cdot (-1) = qb \rightarrow h_{0,j} = h_{2,j} - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

$$-h_{0,j}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{1,j}^{m+2} - h_{2,j}^{m+2} = f_y \cdot h_{1,j-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{1,j}^{m+1} + f_y \cdot h_{1,j+1}^{m+1} + \frac{S_{1,j}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 \Rightarrow$$

$$-\left(h_{2,j}^{m+2} - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}\right) + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{1,j}^{m+2} - h_{2,j}^{m+2} = f_y \cdot h_{1,j-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{1,j}^{m+1} + f_y \cdot h_{1,j+1}^{m+1} + \frac{S_{1,j}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 \Rightarrow$$

$$(i = 1) (j = 2 : nc - 1) \rightarrow \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{1,j}^{m+2} - 2h_{2,j}^{m+2} = f_y \cdot h_{1,j-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{1,j}^{m+1} + f_y \cdot h_{1,j+1}^{m+1} + \frac{S_{1,j}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

#### 2.1.3 – Condições de contorno no bordo superior

##### 2.1.3.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo superior

$$(i = nr) (j = 2 : nc - 1) \rightarrow h_{nr,j} = ht$$

##### 2.1.3.2 – Condição de contorno de fluxo prescrita no bordo superior

$$qy = -k \cdot \frac{dh}{dy} \cdot n_y \rightarrow qy_{nr,j} \equiv -k \cdot \frac{h_{nr+1,j} - h_{nr-1,j}}{2\Delta y} \cdot (+1) = qt \rightarrow h_{nr+1,j} = h_{nr-1,j} - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

$$-h_{nr-1,j}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{nr,j}^{m+2} - h_{nr+1,j}^{m+2} = f_y \cdot h_{nr,j-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{nr,j}^{m+1} + f_y \cdot h_{nr,j+1}^{m+1} + \frac{S_{nr,j}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 \Rightarrow$$

$$-h_{nr-1,j}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{nr,j}^{m+2} - \left(h_{nr-1,j}^{m+2} - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}\right) = f_y \cdot h_{nr,j-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{nr,j}^{m+1} + f_y \cdot h_{nr,j+1}^{m+1} + \frac{S_{nr,j}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 \Rightarrow$$

$$(i = nr) (j = 2 : nc - 1) \rightarrow -2h_{nr-1,j}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{nr,j}^{m+2} = f_y \cdot h_{nr,j-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{nr,j}^{m+1} + f_y \cdot h_{nr,j+1}^{m+1} + \frac{S_{nr,j}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

## 2.2 – Solução da coluna da esquerda ( $j = 1$ )

### 2.2.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo esquerdo

$$(i = 1 : nr) \quad (j = 1) \rightarrow h_{i,1} = hl$$

### 2.2.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo esquerdo

$$qx = -k \cdot \frac{dh}{dx} \cdot n_x \rightarrow qx_{i,1} \cong -k \cdot \frac{h_{i,2} - h_{i,0}}{2\Delta x} \cdot (-1) = ql \rightarrow h_{i,0} = h_{i,2} - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

$$-h_{i-1,1}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{i,1}^{m+2} - h_{i+1,1}^{m+2} = f_y \cdot h_{i,0}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{i,1}^{m+1} + f_y \cdot h_{i,2}^{m+1} + \frac{S_{i,1}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 \Rightarrow$$

$$-h_{i-1,1}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{i,1}^{m+2} - h_{i+1,1}^{m+2} = f_y \cdot \left(h_{i,2}^{m+1} - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}\right) + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{i,1}^{m+1} + f_y \cdot h_{i,2}^{m+1} + \frac{S_{i,1}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 \Rightarrow$$

$$(i = 2 : nr - 1) \quad (j = 1) \rightarrow -h_{i-1,1}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{i,1}^{m+2} - h_{i+1,1}^{m+2} = \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{i,1}^{m+1} + 2f_y \cdot h_{i,2}^{m+1} + \frac{S_{i,1}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - ql \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

### 2.2.2.1 – Condições de contorno no bordo inferior

#### 2.2.2.1.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo inferior

$$(i = 1) \quad (j = 1) \rightarrow h_{1,1} = hb$$

#### 2.2.2.1.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo inferior

$$qy = -k \cdot \frac{dh}{dy} \cdot n_y \rightarrow qy_{1,1} \cong -k \cdot \frac{h_{2,1} - h_{0,1}}{2\Delta y} \cdot (-1) = qb \rightarrow h_{0,1} = h_{2,1} - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

$$-h_{0,1}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{1,1}^{m+2} - h_{2,1}^{m+2} = \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{1,1}^{m+1} + 2f_y \cdot h_{1,2}^{m+1} + \frac{S_{1,1}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - ql \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} \Rightarrow$$

$$-\left(h_{2,1}^{m+2} - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}\right) + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{1,1}^{m+2} - h_{2,1}^{m+2} = \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{1,1}^{m+1} + 2f_y \cdot h_{1,2}^{m+1} + \frac{S_{1,1}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - ql \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} \Rightarrow$$

$$(i = 1) \quad (j = 1) \rightarrow \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{1,1}^{m+2} - 2h_{2,1}^{m+2} = \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{1,1}^{m+1} + 2f_y \cdot h_{1,2}^{m+1} + \frac{S_{1,1}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - ql \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

### 2.2.2.2 – Condições de contorno no bordo superior

#### 2.2.2.2.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo superior

$$(i = nr) \quad (j = 1) \rightarrow h_{nr,1} = ht$$

#### 2.2.2.2.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo superior

$$qy = -k \cdot \frac{dh}{dy} \cdot n_y \rightarrow qy_{nr,1} \cong -k \cdot \frac{h_{nr+1,1} - h_{nr-1,1}}{2\Delta y} \cdot (+1) = qt \rightarrow h_{nr+1,1} = h_{nr-1,1} - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

$$-h_{nr-1,1}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{nr,1}^{m+2} - h_{nr+1,1}^{m+2} = \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{nr,1}^{m+1} + 2f_y \cdot h_{nr,2}^{m+1} + \frac{S_{nr,1}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - ql \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} \Rightarrow$$

$$-h_{nr-1,1}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{nr,1}^{m+2} - \left(h_{nr-1,1}^{m+2} - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}\right) = \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{nr,1}^{m+1} + 2f_y \cdot h_{nr,2}^{m+1} + \frac{S_{nr,1}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - ql \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} \Rightarrow$$

$$(i = nr) \quad (j = 1) \rightarrow -2h_{nr-1,1}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{nr,1}^{m+2} = \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{nr,1}^{m+1} + 2f_y \cdot h_{nr,2}^{m+1} + \frac{S_{nr,1}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - ql \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

### 2.3 – Solução da coluna da direita ( $j = nc$ )

#### 2.3.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo direito

$$(i = 1 : nr) \quad (j = nc) \rightarrow h_{i,nc} = hr$$

#### 2.3.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo direito

$$qx = -k \cdot \frac{dh}{dx} \cdot n_x \rightarrow qx_{i,nc} \cong -k \cdot \frac{h_{i,nc+1} - h_{i,nc-1}}{2\Delta x} \cdot (+1) = qr \rightarrow h_{i,nc+1} = h_{i,nc-1} - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

$$-h_{i-1,nc}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{i,nc}^{m+2} - h_{i+1,nc}^{m+2} = f_y \cdot h_{i,nc-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{i,nc}^{m+1} + f_y \cdot h_{i,nc+1}^{m+1} + \frac{S_{i,nc}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 \Rightarrow$$

$$-h_{i-1,nc}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{i,nc}^{m+2} - h_{i+1,nc}^{m+2} = f_y \cdot h_{i,nc-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{i,nc}^{m+1} + f_y \cdot \left(h_{i,nc-1}^{m+1} - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}\right) + \frac{S_{i,nc}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 \Rightarrow$$

$$(i = 2 : nr - 1) \quad (j = nc) \rightarrow -h_{i-1,nc}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{i,nc}^{m+2} - h_{i+1,nc}^{m+2} = 2f_y \cdot h_{i,nc-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{i,nc}^{m+1} + \frac{S_{i,nc}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - qr \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

#### 2.3.2.1 – Condições de contorno no bordo inferior

##### 2.3.2.1.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo inferior

$$(i = 1) \quad (j = nc) \rightarrow u_{1,nc} = ub$$

##### 2.3.2.1.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo inferior

$$qy = -k \cdot \frac{dh}{dy} \cdot n_y \rightarrow qy_{1,nc} \cong -k \cdot \frac{h_{2,nc} - h_{0,nc}}{2\Delta y} \cdot (-1) = qb \rightarrow h_{0,nc} = h_{2,nc} - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

$$-h_{0,nc}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{1,nc}^{m+2} - h_{2,nc}^{m+2} = 2f_y \cdot h_{1,nc-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{1,nc}^{m+1} + \frac{S_{1,nc}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - qr \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} \Rightarrow$$

$$-\left(h_{2,nc}^{m+2} - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}\right) + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{1,nc}^{m+2} - h_{2,nc}^{m+2} = 2f_y \cdot h_{1,nc-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{1,nc}^{m+1} + \frac{S_{1,nc}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - qr \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} \Rightarrow$$

$$(i = 1) \quad (j = nc) \rightarrow \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{1,nc}^{m+2} - 2h_{2,nc}^{m+2} = 2f_y \cdot h_{1,nc-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{1,nc}^{m+1} + \frac{S_{1,nc}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - qr \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

#### 2.3.2.2 – Condições de contorno no bordo superior

##### 2.3.2.2.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo superior

$$(i = nr) \quad (j = nc) \rightarrow h_{nr,nc} = ht$$

##### 2.3.2.2.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo superior

$$qy = -k \cdot \frac{dh}{dy} \cdot n_y \rightarrow qy_{nr,nc} \cong -k \cdot \frac{h_{nr+1,nc} - h_{nr-1,nc}}{2\Delta y} \cdot (+1) = qt \rightarrow h_{nr+1,nc} = h_{nr-1,nc} - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

$$-h_{nr-1,nc}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{nr,nc}^{m+2} - h_{nr+1,nc}^{m+2} = 2f_y \cdot h_{nr,nc-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{nr,nc}^{m+1} + \frac{S_{nr,nc}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - qr \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} \Rightarrow$$

$$-h_{nr-1,nc}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{nr,nc}^{m+2} - \left(h_{nr+1,nc}^{m+2} - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}\right) = 2f_y \cdot h_{nr,nc-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{nr,nc}^{m+1} + \frac{S_{nr,nc}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - qr \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} \Rightarrow$$

$$(i = nr) \quad (j = nc) \rightarrow -2h_{nr-1,nc}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot h_{nr,nc}^{m+2} = 2f_y \cdot h_{nr,nc-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot h_{nr,nc}^{m+1} + \frac{S_{nr,nc}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - qr \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$