



Curvas e Superfícies

Baseado em materiais preparados por
Marcelo Gattass – Depto. de Informática – PUC-Rio
e
André Maués Brabo Pereira – Depto. de Eng. Civil – UFF

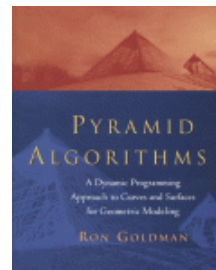
(adaptado por Luiz Fernando Martha para a disciplina
CIV2802 – Sistemas Gráficos para Engenharia)

Representações de Curvas e Superfícies

Quatro tipos de representações para curvas e superfícies são comuns em Computação Gráfica e Projeto Geométrico: explícita, implícita, paramétrica e procedural.

Cada uma dessas alternativas será brevemente introduzida, entretanto apenas uma forma particular será enfatizada, a representação paramétrica, utilizada ao longo do curso.

Fonte:

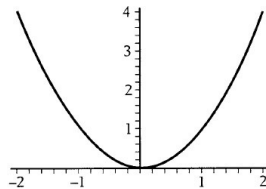


Representações Explícitas

Ao estudar geometria analítica, é comum utilizar coordenadas retangulares e considerar equações da forma $y = f(x)$. Os gráficos $(x, f(x))$ dessas funções são curvas no plano. Por exemplo, $y = 3x + 1$ representa uma linha reta, e $y = x^2$ representa uma parábola (ver figura).

Similarmente, podem-se gerar superfícies ao considerar equações da forma $z = f(x,y)$: a equação $z = 2x + 5y - 7$ representa um plano no espaço, e $z = x^2 - y^2$ representa um parabolóide hiperbólico.

Expressões da forma $y = f(x)$ ou $z = f(x,y)$ são chamadas de representações explícitas porque elas expressam uma variável explicitamente em termos das outras variáveis.



Representações Implícitas

Nem todas as curvas e superfícies podem ser prontamente capturadas por uma única expressão explícita. Por exemplo, o círculo de raio unitário e centrado na origem é representado implicitamente por todas as soluções da equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Se tentar resolver explicitamente para y em termos de x , obtém-se $y = \sqrt{1-x^2}$ que representa apenas a metade superior do círculo.

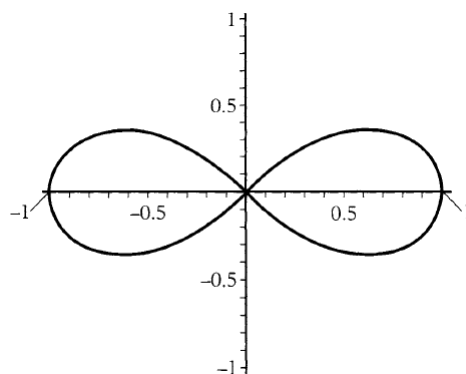
Portanto, tem de usar duas fórmulas explícitas $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ para capturar o círculo inteiro. Muitas vezes é mais fácil ficar com a equação implícita original em vez de resolver explicitamente por uma das variáveis. Assim, $x^2 + y^2 - 1 = 0$ representa um círculo, e $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ representa uma esfera. Equações da forma $f(x, y) = 0$ ou $f(x, y, z) = 0$ são chamadas representações implícitas porque representam a curva ou superfície implicitamente sem resolver explicitamente por uma das variáveis.

Representações Implícitas

Representações implícitas são mais gerais do que as representações explícitas. A curva explícita $y = f(x)$ é a mesma curva implícita $y - f(x) = 0$, porém como já foi visto, nem sempre é uma questão simples converter uma curva implícita numa única fórmula explícita. Além disso, as equações implícitas podem ser utilizadas para definir curvas e superfícies fechadas ou curvas e superfícies que se auto-interceptam, formas que são impossíveis de representar com funções explícitas (figura no próximo *slide*).

Para curvas e superfícies fechadas, a equação implícita pode também ser usada para distinguir o interior do exterior, olhando para o sinal da expressão implícita. Por exemplo, para pontos dentro do círculo unitário $x^2 + y^2 - 1 < 0$, e para pontos fora do círculo unitário $x^2 + y^2 - 1 > 0$. Esta capacidade de distinguir facilmente entre o interior e o exterior de uma curva ou superfície fechada é frequentemente importante em aplicações de modelagem de sólidos.

Representações Implícitas



A lemniscata de Bernoulli: $(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)^2 = 0$. Note que diferentemente de funções explícitas, os gráficos de equações implícitas podem se auto-interceptarem.

Representações Implícitas

No entanto, as representações implícitas também têm suas desvantagens. Dada uma representação explícita $y = f(x)$, pode-se facilmente encontrar muitos pontos da curva $(x, f(x))$, selecionando valores para x e calculando $f(x)$.

Se as funções $f(x)$ forem restritas a funções elementares como polinômios, então para cada x existe um único y facilmente calculável. Assim, é uma questão simples representar graficamente a curva $y = f(x)$.

Por outro lado, pode não ser uma tarefa tão fácil encontrar pontos na curva $f(x, y) = 0$. Para muitos valores de x pode não existir um valor correspondente y , ou pode haver vários valores de y , mesmo que as funções de $f(x, y)$ sejam restritas a polinômios em x e y .

Encontrar pontos em superfícies implícitas $f(x, y, z) = 0$ pode ser ainda mais complicado. Assim, pode ser difícil *renderizar* curvas e superfícies definidas implicitamente.

Representações Paramétricas

Existe outra forma padrão para representar curvas e superfícies, que é mais geral do que a forma explícita e que é ainda fácil de *renderizar*. Pode-se expressar curvas e superfícies parametricamente, representando cada coordenada com uma equação explícita em um novo conjunto de parâmetros. Para curvas planas tem-se $x = x(t)$ e $y = y(t)$, para superfícies em 3D tem-se $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$ e $z = z(s, t)$. Por exemplo, as equações paramétricas

$$x(t) = \frac{2t}{1+t^2} \quad y(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

representam o círculo unitário centrado na origem. Pode-se facilmente verificar que $x^2(t) + y^2(t) - 1 = 0$. Da mesma forma, as equações paramétricas

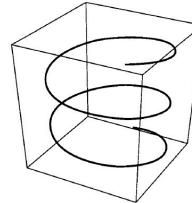
$$x(s, t) = \frac{2s}{1+s^2+t^2} \quad y(s, t) = \frac{2t}{1+s^2+t^2} \quad z(s, t) = \frac{1-s^2-t^2}{1+s^2+t^2}$$

representam uma esfera unitária: $x^2(s, t) + y^2(s, t) + z^2(s, t) - 1 = 0$. Muitas vezes, restringe-se o domínio do parâmetro. Deste modo, uma curva paramétrica é tipicamente a imagem de um segmento de reta; uma superfície paramétrica, a imagem de uma região - geralmente retangular ou triangular - do plano.

Representações Paramétricas

A representação paramétrica tem várias vantagens. Assim como a representação explícita, a representação paramétrica é fácil de *renderizar*: basta avaliar as funções de coordenadas em vários valores dos parâmetros. Assim como as equações implícitas, equações paramétricas também podem ser usadas para representar curvas e superfícies fechadas, bem como as curvas e superfícies que se auto-interceptam. Além disso, a representação paramétrica tem outra vantagem: é fácil estender para dimensões maiores. Para ilustrar: caso deseja-se representar uma curva em 3D, tudo o que precisa fazer é introduzir uma equação adicional $z = z(t)$. Assim, as equações paramétricas $x(t) = 2t - 5$ $y(t) = 3t + 7$ $z(t) = 4t + 1$ representam uma linha em 3D. A figura ilustra uma curva paramétrica mais complicada em 3D. A hélice:

$$x = \cos(t), y = \sin(t), z = t/5.$$



Representações Paramétricas

A representação paramétrica tem suas próprias idiossincrasias. A representação explícita de uma curva é única: o gráfico de $y = g(x)$ é a mesma curva como o gráfico de $y - f(x) = 0$ se e somente se $g(x) = f(x)$.

Analogamente, se restringir às funções polinomiais, então a representação implícita $f(x,y) = 0$ é essencialmente única. No entanto, a representação paramétrica de uma curva não é única. Por exemplo, as equações

$$x(t) = \frac{2t}{1+t^2} \quad y(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad x(t) = \sin(t) \quad y(t) = \cos(t)$$

são duas representações paramétricas muito diferentes para o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$. Além disso, para parametrizações polinomiais ou racionais, sabe-se que para uma dada curva ou superfície paramétrica encontra-se uma curva ou superfície polinomial implícita. O inverso, no entanto, não é verdade. Existem curvas e superfícies polinomiais implícitas que não possuem parametrização polinomial ou racional. Assim, a forma polinomial implícita é mais geral do que a forma paramétrica.

Representações Paramétricas

No entanto, por causa de seu poder, simplicidade e facilidade de uso, a representação paramétrica de curvas e superfícies é a mais utilizada. Além disso, a representação paramétrica funciona igualmente bem em um número arbitrário de dimensões. Note-se que no caso unidimensional a representação paramétrica é a mesma que a representação explícita, portanto as representações explícitas serão cobertas automaticamente como um caso especial.

As vezes será útil pensar sobre o caso especial de representações explícitas, mas que não gere confusão, porque as curvas paramétricas apresentam propriedades geométricas tais como a auto-intersecção que nunca ocorre em representações explícitas. Curvas paramétricas planares $(x(t), y(t))$ são muito mais flexível do que os gráficos planares $(t, x(t))$ de funções explícitas.

Representações Paramétricas

Resta dizer que tipos de funções serão permitidas nas representações paramétricas de interesse. A questão principal é a seleção das funções paramétricas que devem ser utilizadas para gerar curvas e superfícies adequadas. Geralmente as funções utilizadas serão variantes de polinômios: ou polinômios simples ou funções racionais (razões de polinômios), ou ainda polinômios por partes (*splines*) ou funções racionais por partes.

Polinômios têm muitas vantagens, especialmente quando usados em conjunto com um computador. Polinômios são fáceis de avaliar. Além disso, as funções mais complicadas são geralmente avaliadas calculando alguma aproximação polinomial, então não está se perdendo nada ao se restringir a polinômios em primeiro lugar. Além disso, há uma teoria bem desenvolvida de polinômios em análise numérica e teoria da aproximação; computação gráfica e modelagem geométrica empregam extensivamente conhecimentos dessa teoria.

Representações Procedurais

Ainda tem-se que mencionar as curvas ou superfícies proceduralmente definidas. Em projetos geométricos, *offsets*, composições e filetes são frequentemente especificados por procedimentos em vez de fórmulas. Na modelagem de sólidos, a geometria é frequentemente construída proceduralmente através de operações booleanas, como união, interseção e diferença. A maioria das superfícies fractais e curvas que preenchem completamente um espaço são definidas por algoritmos recursivos e não com fórmulas explícitas.

Não serão discutidos quaisquer destes tipos de procedimentos neste curso. Subdivisão é um outro paradigma para a definição de curvas e superfícies, explorando procedimentos recursivos. Uma vez que certas técnicas de subdivisão estão intimamente relacionadas com curvas e superfícies paramétricas, será mais negócio discutir sobre esses métodos mais adiante neste curso.

Curvas

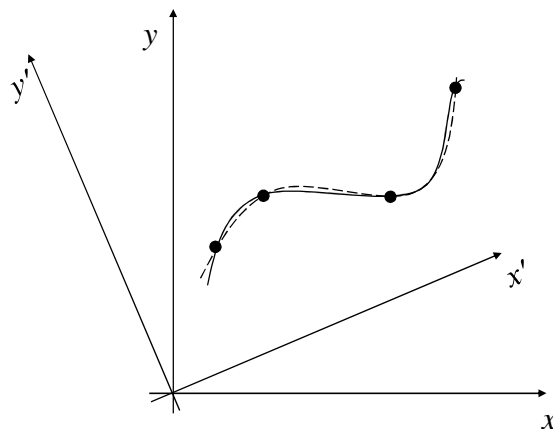
Talvez a maneira mais fácil de descrever uma forma é selecionar alguns pontos sobre essa forma. Dada uma quantidade suficiente pontos, o olho tem uma tendência natural de interpolar suavemente entre os dados. Aqui este problema será estudado matematicamente. Dado um conjunto finito de pontos no espaço afim, serão investigados métodos para gerar curvas e superfícies polinomiais que interpolam os pontos. Começa-se com esquemas para curvas e, posteriormente, estende-se tais técnicas para superfícies.

Curvas

- Linhas
- Beziers
- B-Splines
- NURBS
- Outros tipos especiais de curvas:
Poli-linhas, arcos de círculo e arcos de elipses

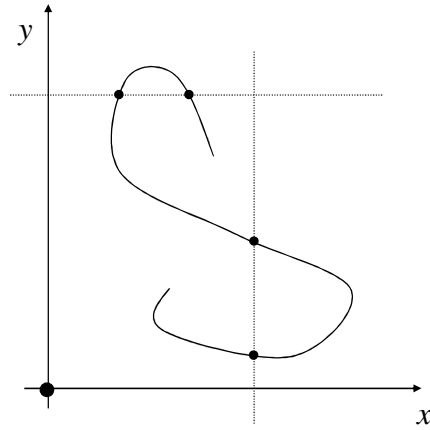
Curvas

Requisito 1: Independência de eixos



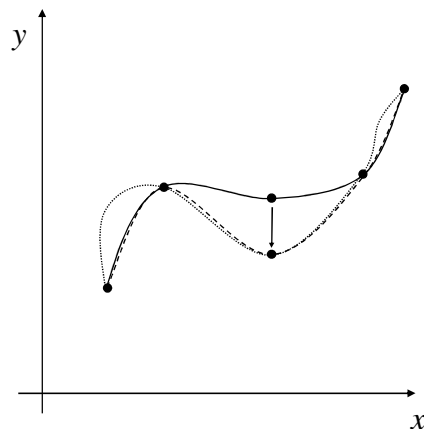
Curvas

Requisito 2: Valores Múltiplos



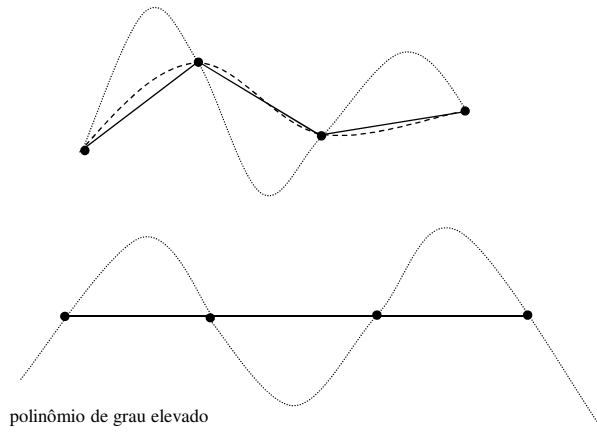
Curvas

Requisito 3: Controle Local



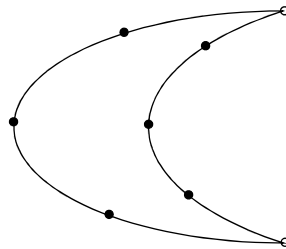
Curvas

Requisito 4: Pouca Oscilação

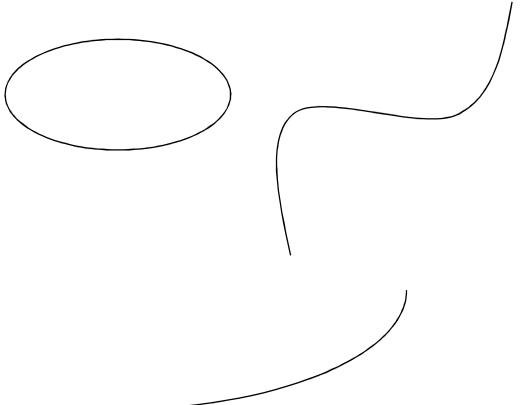


Curvas

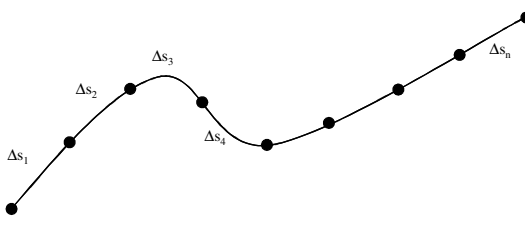
Requisito 4: Continuidade Variável



Curvas
Requisito 5: Versatilidade




Curvas
Requisito 6: Amostragem Uniforme



$\Delta s_1 \approx \Delta s_j$

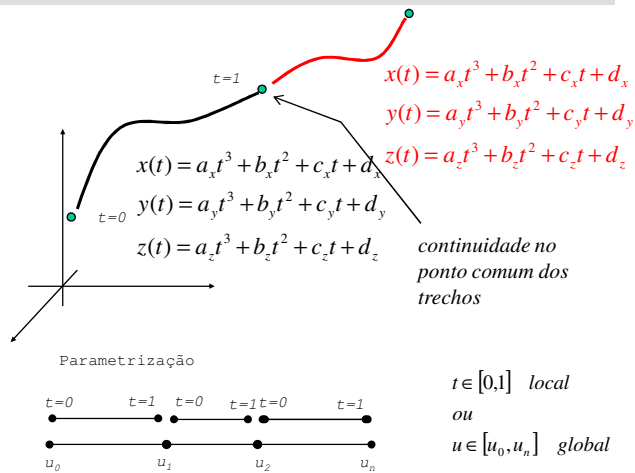
Finalizando:

**Curvas – Requisito 7:
Formulação matemática tratável**



Solução

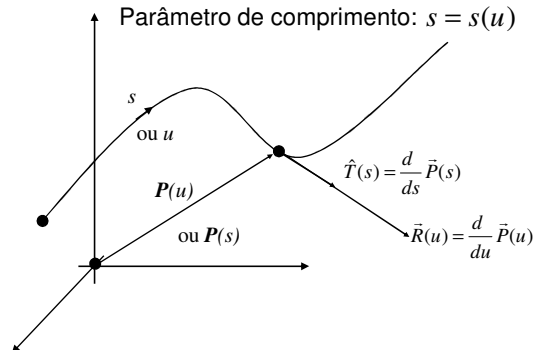
Curva representada por partes através de polinômios de grau baixo (geralmente 3)



Geometria Diferencial

Parâmetro genérico: u

Parâmetro de comprimento: $s = s(u)$



$$\vec{R} = \frac{ds}{du} \hat{T}$$

$$\left| \frac{ds}{du} \right| = \|\vec{R}\|$$

Requisitos da parametrização

$\vec{P}(u) = (1-u)\vec{P}_0 + u\vec{P}_1$

$\vec{P}(u) = (1-f(u))\vec{P}_0 + f(u)\vec{P}_1$

$\frac{d}{du}\vec{P}(u) = 0$

Se $u_2 > u_1 \Rightarrow s(u_2) > s(u_1)$

Continuidade Geométrica e Paramétrica

Descontínua

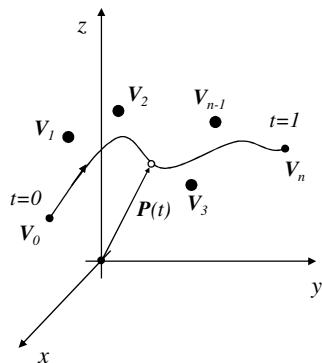
Contínua: C^0 e G^0

$\vec{R}_1(0) = \vec{R}_2(1)$
Contínua: C^1 e G^1

Geométrica	Paramétrica
<p>$\vec{R}_1(0) \neq \vec{R}_2(1)$ $\vec{T}_1(0) = \vec{T}_2(1)$</p> <p>$C^0$ e G^1</p>	<p>$\vec{R}_1(0) = \vec{R}_2(1)$ $\vec{T}_1(0) \neq \vec{T}_2(1)$</p> <p>$C^1$ e G^0</p>

Curvas de Bézier

P. de Casteljaou, 1959 (Citroën)
 P. de Bézier, 1962 (Renault) - UNISURF
 Forest 1970: Polinômios de Bernstein



$$\vec{P}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \vec{V}_i$$

onde:

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

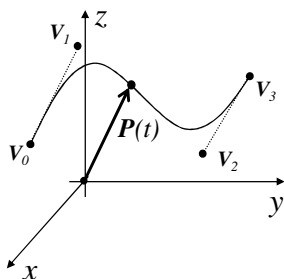
pol. Bernstein

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

coef. binomial

Bézier Cúbicas

$$\vec{P}(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \vec{V}_i$$



$$B_{0,3}(t) = \binom{3}{0} (1-t)^{3-0} t^0 = (1-t)^3$$

$$B_{1,3}(t) = \binom{3}{1} (1-t)^{3-1} t^1 = 3(1-t)^2 t$$

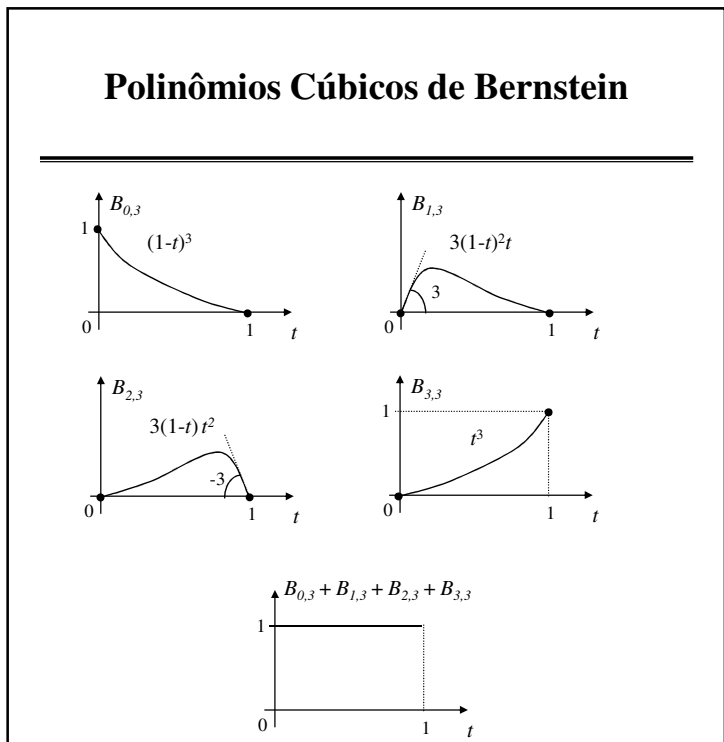
$$B_{2,3}(t) = \binom{3}{2} (1-t)^{3-2} t^2 = 3(1-t) t^2$$

$$B_{3,3}(t) = \binom{3}{3} (1-t)^{3-3} t^3 = t^3$$

$$\sum_i B_{i,3}(t) = [(1-t) + t]^3 = 1$$

$$\vec{P}(t) = (1-t)^3 \vec{V}_0 + 3(1-t)^2 t \vec{V}_1 + 3(1-t) t^2 \vec{V}_2 + t^3 \vec{V}_3$$

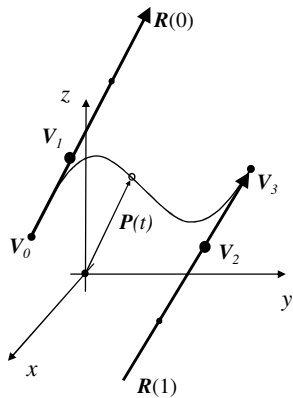
Polinômios Cúbicos de Bernstein



Propriedades da Bézier Cúbica

$$\vec{P}(t) = (1-t)^3 \vec{V}_0 + 3(1-t)^2 t \vec{V}_1 + 3(1-t)t^2 \vec{V}_2 + t^3 \vec{V}_3$$

$$\frac{d}{dt} \vec{P}(t) = -3(1-t)^2 \vec{V}_0 + [-6(1-t)t + 3(1-t)^2] \vec{V}_1 + [-3t^2 + 6(1-t)t] \vec{V}_2 + t^3 \vec{V}_3$$



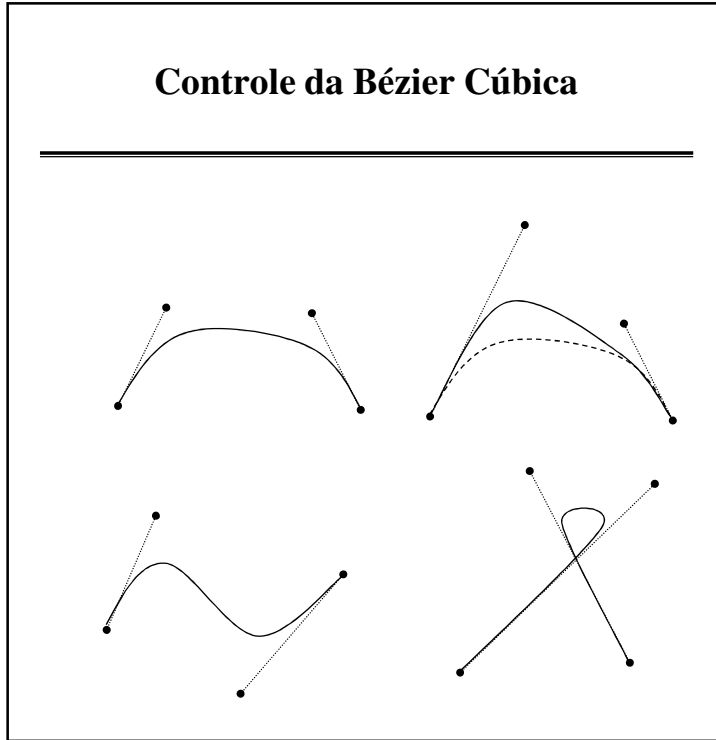
$$\vec{P}(0) = \vec{V}_0$$

$$\vec{P}(1) = \vec{V}_3$$

$$\frac{d}{dt} \vec{P}(0) = -3 \vec{V}_0 + 3 \vec{V}_1$$

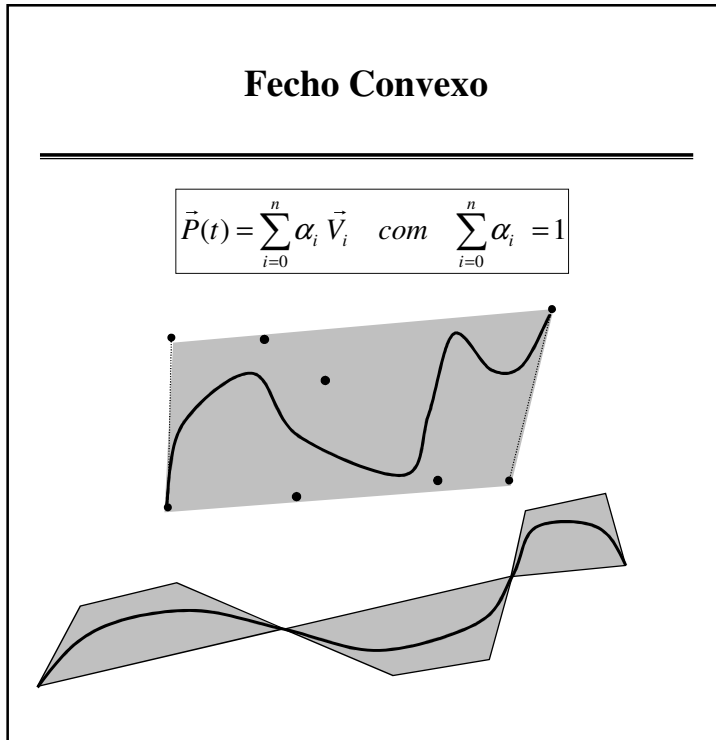
$$\frac{d}{dt} \vec{P}(1) = -3 \vec{V}_2 + 3 \vec{V}_3$$

Controle da Bézier Cúbica



Fecho Convexo

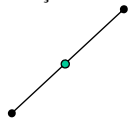
$$\vec{P}(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \vec{V}_i \quad \text{com} \quad \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$$



Demonstração

Indução

$n=1$



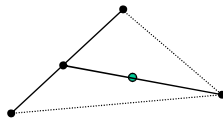
$$\vec{P}(t) = \alpha_0 \vec{V}_0 + \alpha_1 \vec{V}_1 \quad \alpha_0 + \alpha_1 = 1$$

👍 ok

$n=2$

$$\vec{P}(t) = \alpha_0 \vec{V}_0 + \alpha_1 \vec{V}_1 + \alpha_2 \vec{V}_2 \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\vec{P}(t) = (\alpha_0 + \alpha_1) \left[\frac{\alpha_0}{(\alpha_0 + \alpha_1)} \vec{V}_0 + \frac{\alpha_1}{(\alpha_0 + \alpha_1)} \vec{V}_1 \right] + \alpha_2 \vec{V}_2 \quad (\alpha_0 + \alpha_1) + \alpha_2 = 1$$



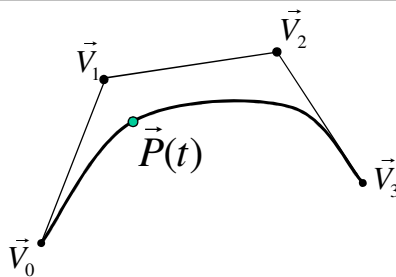
$\vec{P}(t)$ é interior

👍 ok

$n=3$

...

Equação do Foley

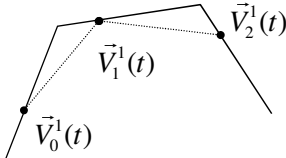


$$\vec{P}(t) = (1-t)^3 \vec{V}_0 + 3(1-t)^2 t \vec{V}_1 + 3(1-t)t^2 \vec{V}_2 + t^3 \vec{V}_3$$

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{0x} & V_{0y} & V_{0z} \\ V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \\ V_{3x} & V_{3y} & V_{3z} \end{bmatrix}$$

Redução de n=3 para n=2

$$\vec{P}(t) = (1-t)^3 \vec{V}_0 + 3(1-t)^2 t \vec{V}_1 + 3(1-t)t^2 \vec{V}_2 + t^3 \vec{V}_3$$

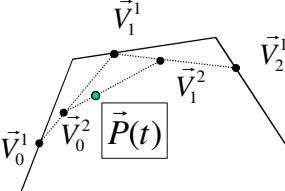
$$\begin{cases} \vec{V}_0^1(t) = (1-t) \vec{V}_0 + t \vec{V}_1 \\ \vec{V}_1^1(t) = (1-t) \vec{V}_1 + t \vec{V}_2 \\ \vec{V}_2^1(t) = (1-t) \vec{V}_2 + t \vec{V}_3 \end{cases}$$


$$\vec{P}(t) = (1-t)^2 \left[(1-t) \vec{V}_0 + t \vec{V}_1 \right] + 2(1-t)t \left[(1-t) \vec{V}_1 + t \vec{V}_2 \right] + t^2 \left[(1-t) \vec{V}_2 + t \vec{V}_3 \right]$$

$$\vec{P}(t) = (1-t)^2 \vec{V}_0^1 + 2(1-t)t \vec{V}_1^1 + t^2 \vec{V}_2^1 \quad \text{Bezier } n=2$$

Redução de n=2 para n=1

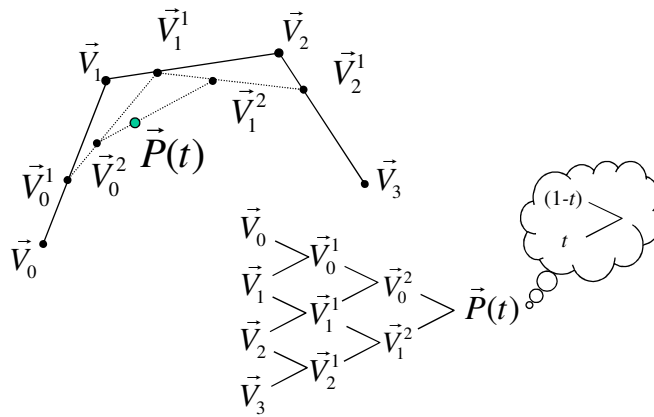
$$\vec{P}(t) = (1-t)^2 \vec{V}_0^1 + 2(1-t)t \vec{V}_1^1 + t^2 \vec{V}_2^1$$

$$\begin{cases} \vec{V}_0^2(t) = (1-t) \vec{V}_0^1 + t \vec{V}_1^1 \\ \vec{V}_1^2(t) = (1-t) \vec{V}_1^1 + t \vec{V}_2^1 \end{cases}$$


$$\vec{P}(t) = (1-t) \left[(1-t) \vec{V}_0^1 + t \vec{V}_1^1 \right] + t \left[(1-t) \vec{V}_1^1 + t \vec{V}_2^1 \right]$$

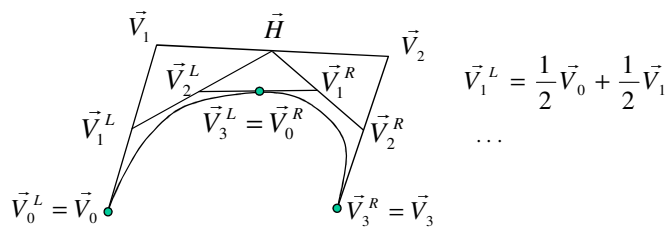
$$\vec{P}(t) = (1-t) \vec{V}_0^2 + t \vec{V}_1^2 \quad \text{Bezier } n=1$$

Cálculo de um Ponto



Mostre que: $B_{i,n}(t) = (1-t) B_{i,n-1}(t) + t B_{i-1,n-1}(t)$

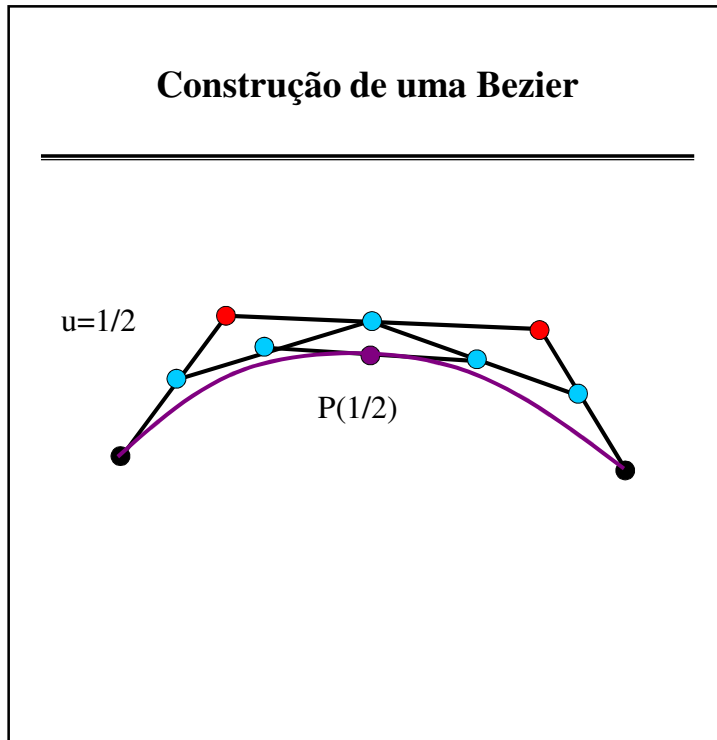
Subdivisão de Bézier Cúbicas



$$\begin{bmatrix} \vec{V}_0^L \\ \vec{V}_1^L \\ \vec{V}_2^L \\ \vec{V}_3^L \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_0 \\ \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_0^R \\ \vec{V}_1^R \\ \vec{V}_2^R \\ \vec{V}_3^R \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_0 \\ \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix}$$

Construção de uma Bezier



Curve fitting

$$\vec{P}(t) = (1-t)^3 \vec{V}_0 + 3(1-t)^2 t \vec{V}_1 + 3(1-t)t^2 \vec{V}_2 + t^3 \vec{V}_3$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{P}(t) &= -3(1-t)^2 \vec{V}_0 + [3(1-t)^2 - 6(1-t)t] \vec{V}_1 + [6(1-t)t - 3t^2] \vec{V}_2 + 3t^2 \vec{V}_3 \\ &= -3(1-t)^2 \vec{V}_0 + 3(3t^2 - 4t + 1) \vec{V}_1 + 3(-3t^2 + 2t) \vec{V}_2 + 3t^2 \vec{V}_3 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{P}(0) = -3^2 \vec{V}_0 + 3 \vec{V}_1 = 3(\vec{V}_1 - \vec{V}_0)$$

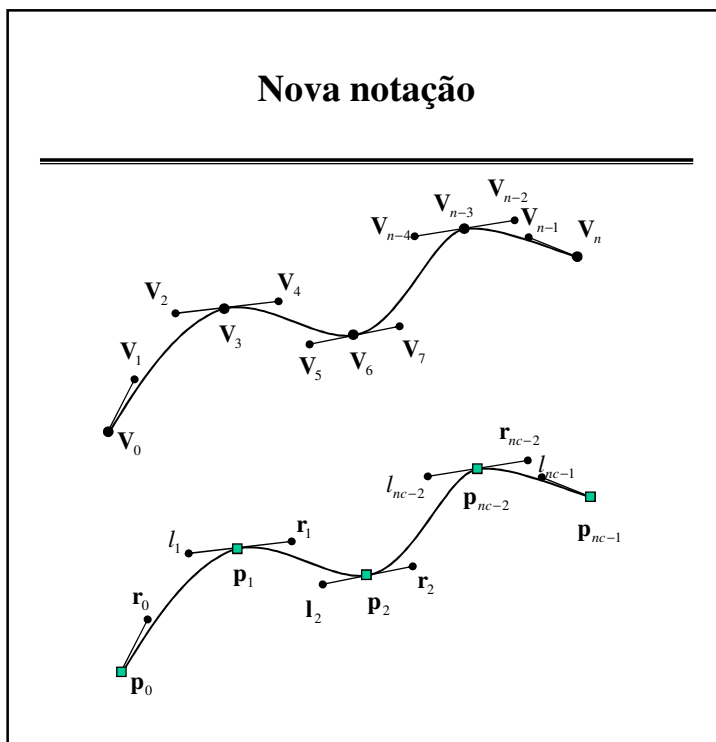
$$\frac{d}{dt} \vec{P}(1) = -3^2 \vec{V}_2 + 3 \vec{V}_3 = 3(\vec{V}_3 - \vec{V}_2)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{P}(t) = 6(1-t) \vec{V}_0 + 3(6t-4) \vec{V}_1 + 3(-6t+2) \vec{V}_2 + 3t^2 \vec{V}_3$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{P}(0) = 6 \vec{V}_0 - 12 \vec{V}_1 + 6 \vec{V}_2 = 6(\vec{V}_0 - 2 \vec{V}_1 + \vec{V}_2)$$

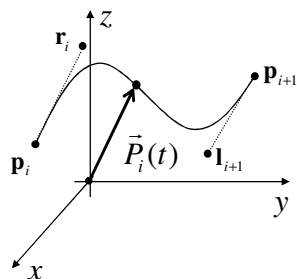
$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{P}(1) = 6 \vec{V}_1 - 12 \vec{V}_2 + 6 \vec{V}_3 = 6(\vec{V}_1 - 2 \vec{V}_2 + \vec{V}_3)$$

Nova notação



Derivadas na nova notação

$$\tilde{P}_i(t) = (1-t)^3 \mathbf{p}_i + 3(1-t)^2 t \mathbf{r}_i + 3(1-t) t^2 \mathbf{l}_{i+1} + t^3 \mathbf{p}_{i+1}$$



$$\frac{d}{dt} \tilde{P}_i(0) = 3(\mathbf{r}_i - \mathbf{p}_i)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{P}_i(1) = 3(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{l}_{i+1})$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{P}_i(0) = 6(\mathbf{p}_i - 2\mathbf{r}_i + \mathbf{l}_{i+1})$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{P}_i(1) = 6(\mathbf{r}_i - 2\mathbf{l}_{i+1} + \mathbf{p}_{i+1})$$

Construção de uma curva que passa por 2 pontos

$n=2$

$6(\mathbf{p}_0 - 2\mathbf{r}_0 + \mathbf{l}_1) = 0$
 $6(\mathbf{r}_0 - 2\mathbf{l}_1 + \mathbf{p}_1) = 0$

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$$

$$\mathbf{l}_1 = \frac{2}{3}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$$

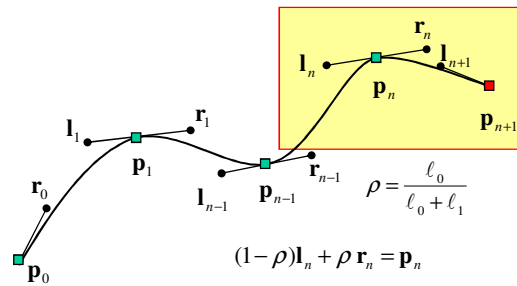
Construção de uma curva que passa por 3 pontos

$\mathbf{p}_0 - 2\mathbf{r}_0 + \mathbf{l}_1 = 0$
 $(1-\rho)\mathbf{l}_1 + \rho\mathbf{r}_1 = \mathbf{p}_1$
 $\mathbf{r}_0 - 2\mathbf{l}_1 + \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1 - 2\mathbf{r}_1 + \mathbf{l}_2$
 $\mathbf{r}_1 - 2\mathbf{l}_2 + \mathbf{p}_2 = 0$

$\rho = \frac{\ell_0}{\ell_0 + \ell_1}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\rho) & \rho & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{l}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ 0 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix}$$

Método construtivo: dados n pontos acrescentar mais um



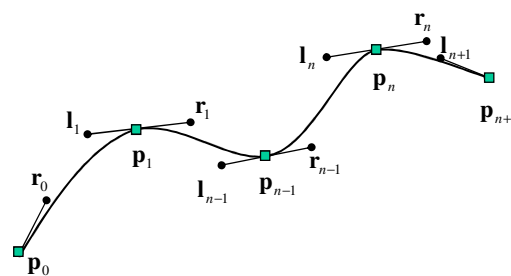
$$(1-\rho)l_n + \rho r_n = p_n$$

$$r_{n-1} - 2l_n + p_n = p_n - 2r_n + l_{n+1}$$

$$r_n - 2l_{n+1} + p_{n+1} = 0$$

$$\begin{bmatrix} (1-\rho) & \rho & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} l_n \\ r_n \\ l_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n \\ -r_{n-1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix}$$

Interpolação: dados $p_0 \dots p_n$, encontre l 's e r 's



Bezier interpolation

Given: np points
 $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{np-1}$
 Find: $2(np-1)$ points
 $l_1, l_2, \dots, l_{np-1}$
 $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{np-2}$

Criteria:

$$\mathbf{p}''_0 = 0 \Rightarrow 6(\mathbf{p}_0 - 2\mathbf{r}_0 + l_1) = 0 \Rightarrow 2\mathbf{r}_0 - l_1 = \mathbf{p}_0$$

$$\mathbf{p}''_{np-1} = 0 \Rightarrow 6(\mathbf{r}_{np-2} - 2l_{np-1} + \mathbf{p}_{np-1}) = 0 \Rightarrow -\mathbf{r}_{np-2} + 2l_{np-1} = \mathbf{p}_{np-1}$$

$$d_i \mathbf{p}_i|_{left} = d_{i-1} \mathbf{p}_i|_{right} \Rightarrow 3d_i(\mathbf{p}_i - l_i) = 3d_{i-1}(\mathbf{r}_i - \mathbf{p}_i) \Rightarrow d_{i-1} + d_i \mathbf{r}_i = (d_{i-1} + d_i) \mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{p}_i''|_{left} = \mathbf{p}_i''|_{right} \Rightarrow 6(\mathbf{r}_{i-1} - 2l_i + \mathbf{p}_i) = 6(\mathbf{p}_i - 2\mathbf{r}_{i-1} + l_i) \Rightarrow -\mathbf{r}_{i-1} + 2l_i - 2\mathbf{r}_{i-1} + l_i = 0$$

Bezier interpolation

Criteria:

$$2\mathbf{r}_0 - l_1 = \mathbf{p}_0$$

$$d_{i-1} + d_i \mathbf{r}_i = (d_{i-1} + d_i) \mathbf{p}_i$$

$$-\mathbf{r}_{i-1} + 2l_i - 2\mathbf{r}_{i-1} + l_i = 0$$

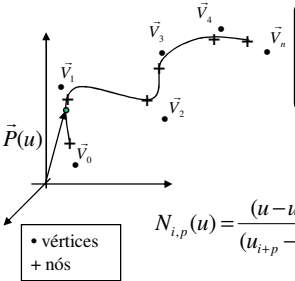
$$-\mathbf{r}_{np-2} + 2l_{np-1} = \mathbf{p}_{np-1}$$

resulting linear system:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & d_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{n-2} & d_{n-1} & 0 & l_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & r_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ l_1 \\ \mathbf{r}_1 \\ l_2 \\ \mathbf{r}_2 \\ l_{n-2} \\ \mathbf{r}_{n-2} \\ l_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0 \\ (d_0 + d_1) \mathbf{p}_1 \\ 0 \\ (d_1 + d_2) \mathbf{p}_2 \\ 0 \\ (d_{n-3} + d_{n-2}) \mathbf{p}_{n-2} \\ 0 \\ \mathbf{p}_{n-1} \end{pmatrix}$$

solve for l and \mathbf{r}

B-Splines



$$\vec{P}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \vec{V}_i$$

$p = \text{grau do polinômio } N_{i,p}(u)$
controla a continuidade (C^{p-1})

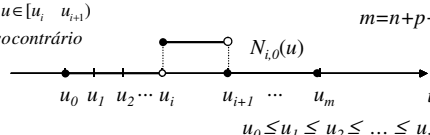
• vértices
+ nós

$$N_{i,p}(u) = \frac{(u-u_i)}{(u_{i+p}-u_i)} N_{i,p-1}(u) + \frac{(u_{i+p+1}-u)}{(u_{i+p+1}-u_{i+1})} N_{i+1,p-1}(u)$$

obs.: $\frac{0}{0}=1$ por definição.

$U = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ $u_i = \text{nós (knots)}$
 $[u_i, u_{i+1}] = \text{trechos (spans)}$

$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \in [u_i, u_{i+1}) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$ $m = n + p + 1$



$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_m$

Propriedades de $N_{i,p}(u)$

- **Não negativa:** $N_{i,p}(u) \geq 0$ para qualquer u, i , e p .
- **Partição da unidade:** $\sum N_{i,p}(u) = 1$ para todo $u \in [u_0, u_m]$.
- **Suporte local:** $N_{i,p}(u) = 0$ se $u \notin [u_i, u_{i+p+1}]$. Mais ainda, in qualquer intervalo dos nós no máximo $p+1$ das $N_{i,p}(u)$ são não zero.
- **Diferenciabilidade:** todas as derivadas de $N_{i,p}(u)$ existem no interior de um intervalo de nós (onde é polinomial). Nos nós $N_{i,p}(u)$ é $p-k$ diferenciável, onde k é a multiplicidade do nó.
- **Extremo:** exceto para o caso $p=0$, $N_{i,p}(u)$ tem apenas um ponto de máximo.

Spline Uniforme

$$N_{i,p}(u) = \frac{(u-u_i)}{(u_{i+p}-u_i)} N_{i,p-1}(u) + \frac{(u_{i+p+1}-u)}{(u_{i+p+1}-u_{i+1})} N_{i+1,p-1}(u)$$

$$\boxed{u_{j+1} - u_j = d}$$

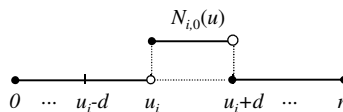
$$N_{i,p}(u) = \frac{(u-u_i)}{pd} N_{i,p-1}(u) + \frac{(u_i + (p+1)d - u)}{pd} N_{i+1,p-1}(u)$$

Splines Uniformes

p=0 e p=1

p=0

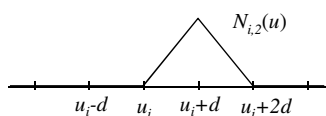
$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \in [u_i, u_{i+1}) \\ 0 & \text{se } u \notin [u_i, u_{i+1}) \end{cases}$$



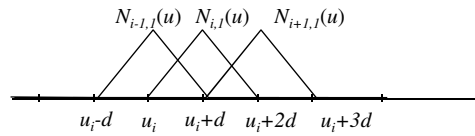
p=1

$$N_{i,1}(u) = \frac{(u-u_i)}{d} N_{i,p-1}(u) + \frac{(u_i + 2d - u)}{d} N_{i+1,p-1}(u)$$

$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \in [0, u_i) \\ \frac{(u-u_i)}{d} & \text{se } u \in [u_i, u_{i+1}) \\ \frac{(u_i + 2d - u)}{d} & \text{se } u \in [u_{i+1}, u_{i+2}) \\ 0 & \text{se } u \in [u_{i+2}, u_m] \end{cases}$$



Splines Uniformes p=2



$$p=2 \quad N_{i,2}(u) = \frac{(u-u_i)}{2d} N_{i,1}(u) + \frac{(u_i+3d-u)}{2d} N_{i+1,1}(u)$$

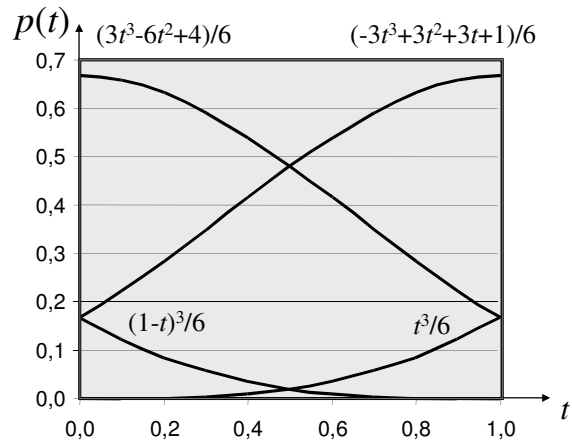
$$N_{i,2}(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \in [0, u_i) \\ \frac{(u-u_i)^2}{2d^2} & \text{se } u \in [u_i, u_{i+1}) \\ \frac{(u-u_i)(u_i+2d-u) + (u_i+3d-u)(u-(u_i+d))}{2d^2} & \text{se } u \in [u_{i+1}, u_{i+2}) \\ -\frac{(u_i+3d-u)^2}{2d^2} & \text{se } u \in [u_{i+2}, u_{i+3}) \\ 0 & \text{se } u \in [u_{i+3}, u_m] \end{cases}$$

Polinômios da B-Spline Uniforme

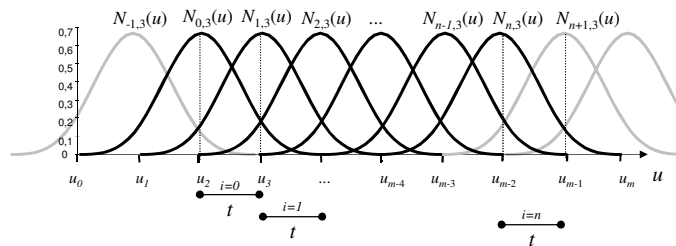
$$N_{i,p}(u) = \frac{(u-u_i)}{pd} N_{i,p-1}(u) + \frac{(u_i+(p+1)d-u)}{pd} N_{i+1,p-1}(u)$$

u	u _i	u _{i+d}	u _{i+2d}	u _{i+3d}	u _{i+4d}
$N_{i,0}(u)$	0	1	0	0	0
$N_{i+1,0}(u)$	0	0	1	0	0
$N_{i,1}(u)$	0	(u-u _i)	(u+2d-u)	0	0
$N_{i+1,1}(u)$	0	0	(u-(u+d))	(u+3d-u)	0
$N_{i,2}(u)$	0	(u-u _i) ² /2d ²	(u-u _i)(u+2d-u)/2d ² + (u+3d-u)(u-(u+d))/2d ²	(u+3d-u) ² /2d ²	0
$N_{i+1,2}(u)$	0	0	(u-(u+d)) ² /2d ²	(u-(u+d))(u+3d-u)/2d ² + (u+4d-u)(u-(u+d))/2d ²	(u+4d-u) ² /2d ²
$N_{i,3}(u)$	0	(u-u _i) ³ /6d ³	[(u-u _i) ² (u+2d-u) + (u-u _i)(u+3d-u)(u-(u+d)) + (u+4d-u)(u-(u+d)) ²]/6d ³	[(u-u _i)(u+3d-u) ² + (u+4d-u)(u-(u+d))(u+3d-u) + (u+4d-u) ² (u-(u+d))]/6d ³	(u+4d-u) ³ /6d ³
t	t=(u-u _i)/d	t=(u-(u+d))/d	t=(u-(u+2d))/d	t=(u-(u+3d))/d	
$N_{i,3}(t)$	0	t ³ /6	(-3t ³ +3t ² +3t+1)/6	(3t ³ -6t ² +4)/6	(1-t) ³ /6

Segmentos da B-spline cúbica



Funções da base



For $i = 0, \dots, n$
 For $t = 0, \dots, 1$

$$\bar{P}_i(t) = \frac{(1-t)^3}{6} \bar{V}_{i-1} + \frac{3t^3 - 6t^2 + 4}{6} \bar{V}_i + \frac{-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{6} \bar{V}_{i+1} + \frac{t^3}{6} \bar{V}_{i+2}$$

B-Spline Periódica - Foley -

Para cada par $V_i, V_{i+1}, i=0, \dots, n$
 Para cada $t=0, \dots, 1$

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i-1,x} & V_{i-1,y} & V_{i-1,z} \\ V_{i,x} & V_{i,y} & V_{i,z} \\ V_{i+1,x} & V_{i+2,y} & V_{i+2,z} \\ V_{i+3,x} & V_{i+3,y} & V_{i+3,z} \end{bmatrix}$$

Periódica:
 $i=0, \dots, n$
 $V_{-1} = V_n$
 $V_{n+1} = V_0$
 $V_{n+2} = V_1$

B-Spline Não Periódica - Foley -

• vértices
 + nós

$$P(0) = (V_{-1} + 4V_0 + V_1)/6$$

$$P''(0) = V_{-1} - 2V_0 + V_1 = 0$$

$$\Rightarrow V_{-1} = 2V_0 - V_1$$

$$i=0; P(0) = V_0$$

$$i=n-1$$

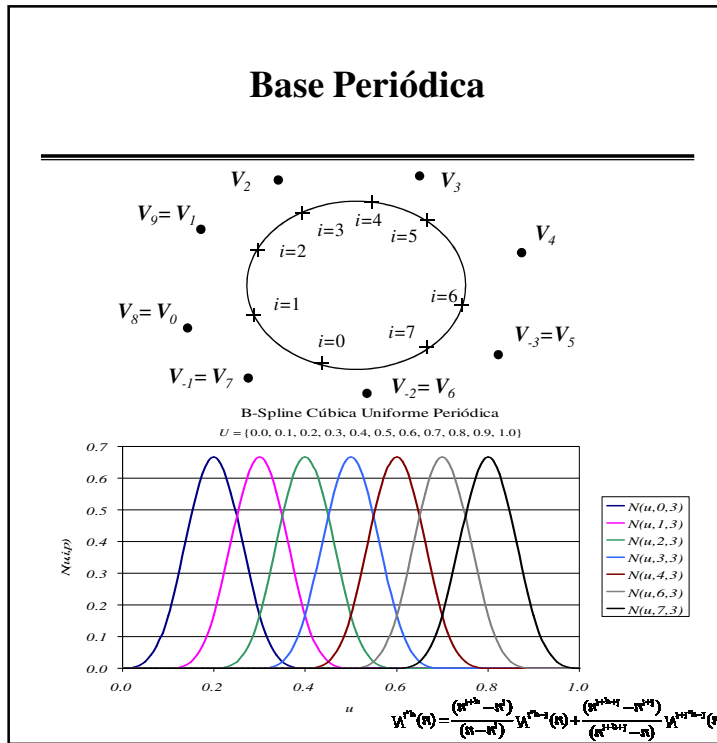
$$P(1) = (V_{n-1} + 4V_n + V_{n+1})/6$$

$$P''(1) = V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1}$$

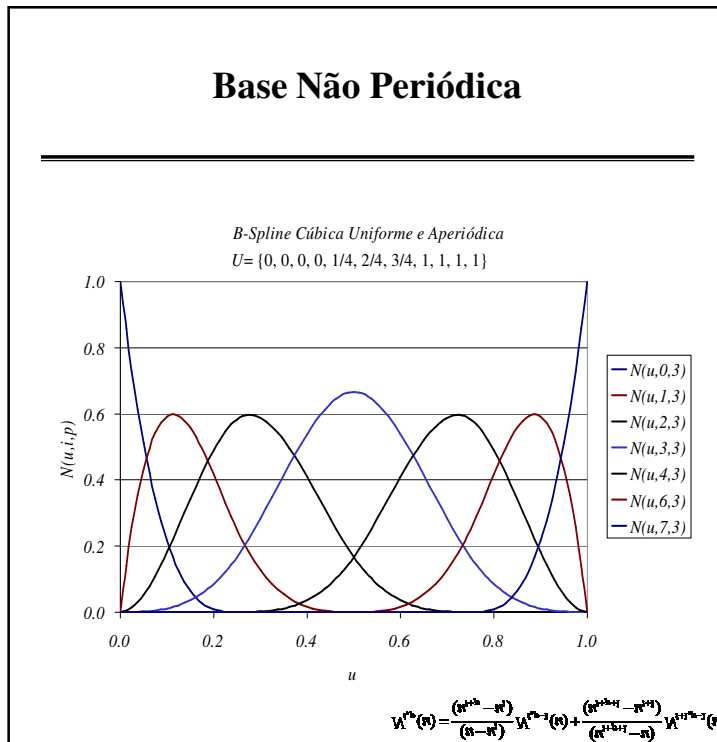
$$\Rightarrow V_{n+1} = 2V_n - V_{n-1}$$

$$i=n-1; P(1) = V_n$$

Base Periódica

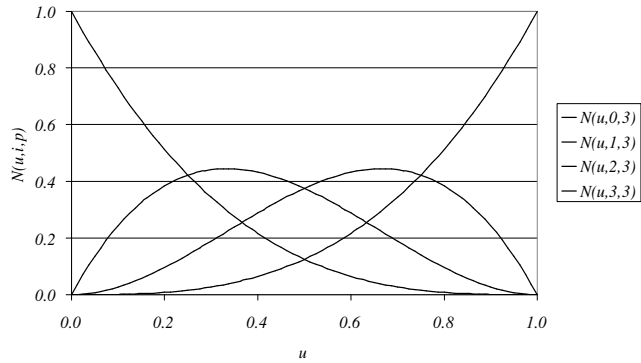


Base Não Periódica



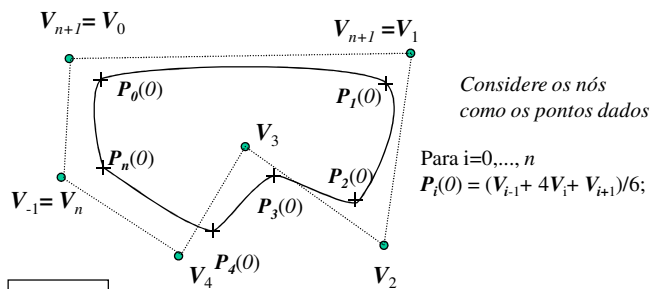
Bézier e B-Spline

Bézier através da B-Spline Cúbica
 $U = \{0,0,0,0,1,1,1,1\}$



$$N_i^{n,p}(u) = \frac{(u-a)^p}{(b-a)^p} N_i^{n,p-1}(u) + \frac{(b-u)^p}{(b-a)^p} N_{i+1}^{n,p-1}(u)$$

B-Spline Periódica - Interpolação -



$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{V}_0 \\ \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \\ \vec{V}_4 \\ \vec{V}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{P}_0 \\ \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \\ \vec{P}_4 \\ \vec{P}_n \end{Bmatrix}$$

B-Spline Não Periódica - Foley -

• vértices
+ nós

Considere os nós
como os pontos dados

$P_0 = V_0 ; P_n = V_n ;$
 Para $i=1, \dots, n-1$
 $P_i(t) = (V_{i-1} + 4V_i + V_{i+1})/6;$

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{V}_0 \\ \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \\ \vec{V}_4 \\ \vec{V}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{P}_0 \\ \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \\ \vec{P}_4 \\ \vec{P}_n \end{Bmatrix}$$

Funções Racionais

Da trigonometria:

$$u = \tan(\alpha / 2)$$

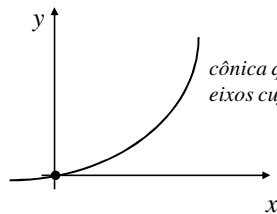
$$\sin(\alpha) = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\vec{P}(u) = \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2} \right)$$

$u \in [0,1]$

Cônicas



cônica qualquer escrita num sistema de eixos cuja origem é um ponto da cônica

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0$$

$$x = ty$$

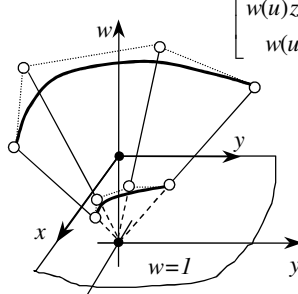
$$at^2y^2 + bty^2 + cy^2 + dty + ey = 0$$

$$y = -\frac{dt + e}{at^2 + bt + c} \quad x = -\frac{dt^2 + et}{at^2 + bt + c}$$

Qualquer cônica pode ser representada parametricamente como uma fração de polinômios quadráticos

NURBS

Non Uniform Rational B-Splines



$$\begin{bmatrix} w(u)x(u) \\ w(u)y(u) \\ w(u)z(u) \\ w(u) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \begin{bmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i z_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{bmatrix} = \frac{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,p}(u) \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}}{\sum_{k=0}^n w_k N_{k,p}(u)}$$

$$\begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad R_{i,p}(u) = \frac{w_i N_{i,p}(u)}{\sum_{k=0}^n w_k N_{k,p}(u)}$$

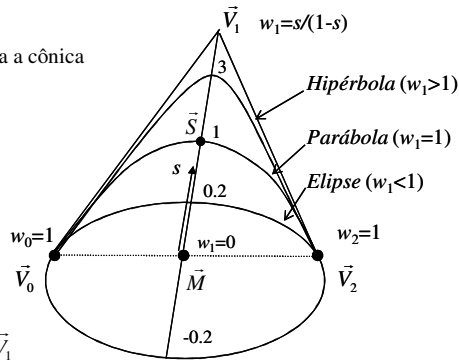
Cônicas como NURBS

$$\vec{P}(u) = \frac{B_{0,2}(u)w_0\vec{V}_0 + B_{1,2}(u)w_1\vec{V}_1 + B_{2,2}(u)w_2\vec{V}_2}{B_{0,2}(u)w_0 + B_{1,2}(u)w_1 + B_{2,2}(u)w_2}$$

onde:

$$B_{i,2}(u) = N_{i,2}(u) \text{ com } U = \{0,0,0,1,1,1\}$$

Faux et al.
 w_0w_2/w_1 - determina a cônica



$$\vec{P}(y_2) = \vec{S} \text{ e}$$

$$\vec{S} = (1-s)\vec{M} + s\vec{V}_1$$

Círculo através de NURBS

$$\begin{cases} x(u) \\ y(u) \end{cases} = \sum_{i=0}^8 R_{i,2}(u) \begin{cases} x_i \\ y_i \end{cases} \text{ onde } R_{i,2}(u) = \frac{w_i N_{i,2}(u)}{\sum_{k=0}^8 w_k N_{k,2}(u)}$$

$$\{w\} = \{1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\} \quad U = \{0, 0, 0, 1/4, 1/4, 1/2, 1/2, 3/4, 3/4, 1, 1, 1\}$$

