Transformações Geométricas 2D

por

Marcelo Gattass

Departamento de Informática

PUC-Rio

(adaptado por Luiz Fernando Martha para a disciplina CIV2802 – Sistemas Gráficos para Engenharia)

Transformações Geométricas
$R^n \rightarrow R^m$

Transformações Geométricas

$$
\begin{aligned}
T: \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{R}^m \\
\{P\} &\rightarrow \{P'\} = T\{P\}
\end{aligned}
$$

<u>Transformação Linear</u>

$$T(\alpha \{P\} + \beta \{Q\}) = \alpha T\{P\} + \beta T\{Q\}$$

$\forall \;\; \alpha, \beta \in \mathbf{R}$

$\quad \{P\}, \{Q\} \in \mathbf{R}^n$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} T\{0\} = \{0\} \\ \{P'\} = T\{P\} = [M]\{P\} \end{cases}$$

Onde as colunas de [M] representam a imagem dos vetores da base no espaço de saída.

Transformações Geométricas
Exemplo: $R^3 \rightarrow R^2$

Exemplo:

$$T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

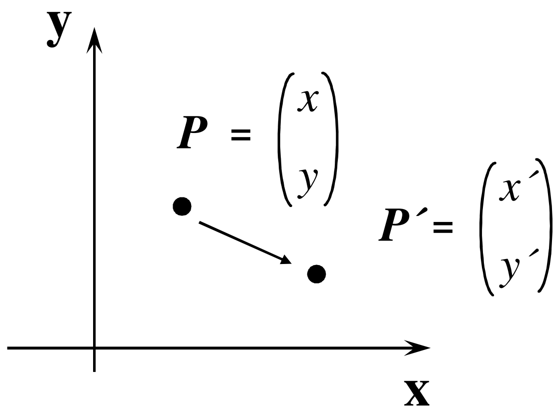
$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

$$T\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [M]\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{Bmatrix}$$

$$T\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = [M]\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{Bmatrix}$$

$$T\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = [M]\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{Bmatrix}$$

Transformações Lineares
$R^2 \rightarrow R^2$

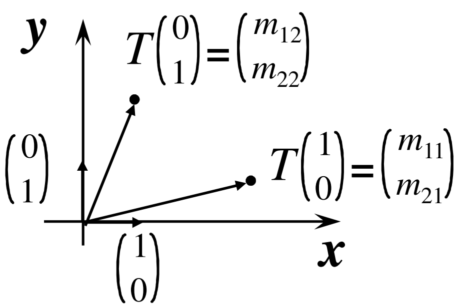


$$\boxed{T(a_1\, \boldsymbol{P}_1 + a_2\, \boldsymbol{P}_2) = a_1\, T(\boldsymbol{P}_1) + a_2\, T(\boldsymbol{P}_2)}$$

Mostre que:

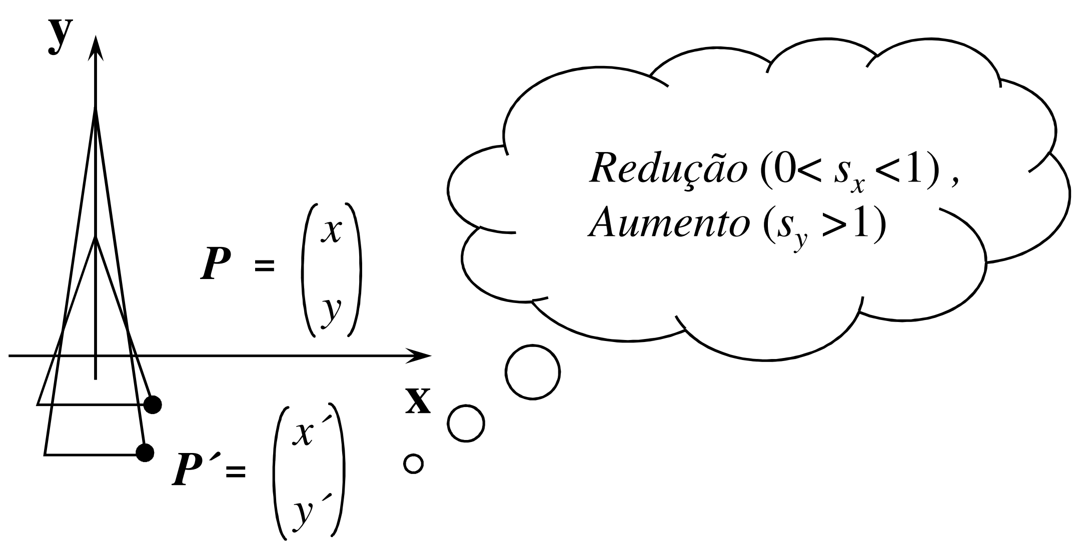
A) $T\,(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

B)



$$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_{12}\\m_{22}\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_{11}\\m_{21}\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x´\\y´\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

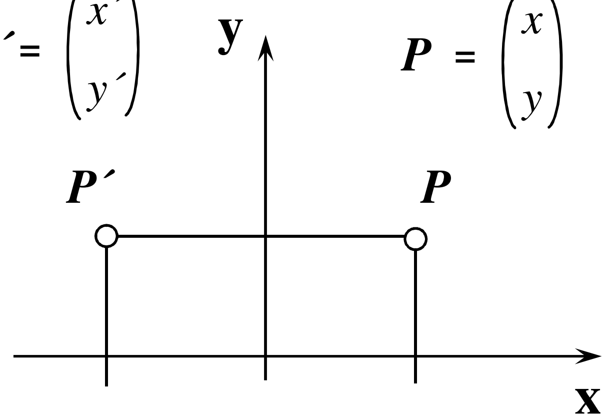
Transformações Lineares
(escala em relação à origem)



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformações Lineares
(espelhamento em relação ao eixo y)

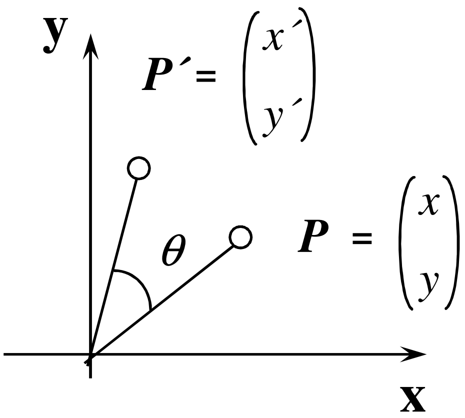
$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$x' = -1.x$
$y' = \quad y$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

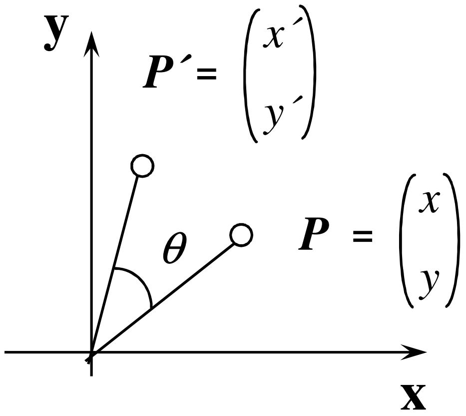
Transformações Lineares
(rotação em relação à origem)

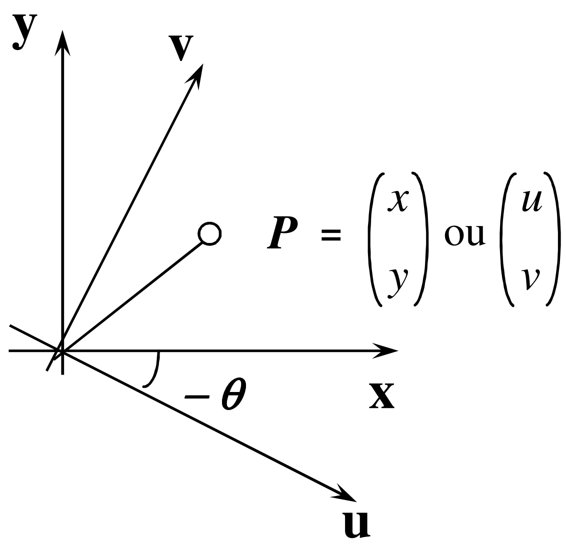


$$x' = x.\cos\theta - y.\text{sen}\,\theta$$
$$y' = x.\text{sen}\,\theta + y.\cos\theta$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformações Lineares
(rotação .vs. mudança de base)





$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

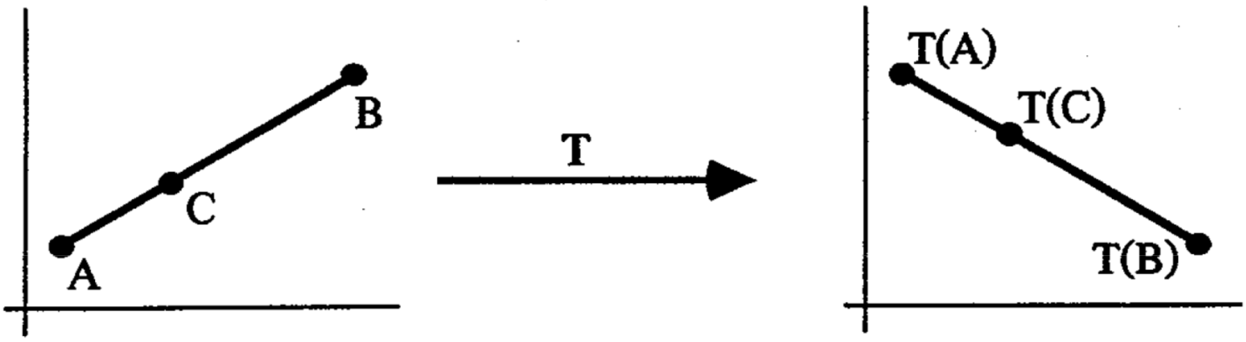
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A rotação de um ponto de θ tem o mesmo efeito da mudança de base por rotação de -θ.
A matriz que implementa a mudança de base por rotação tem em cada linha as componentes dos vetores da nova base descritos na base antiga.

Transformações Lineares
Propriedades

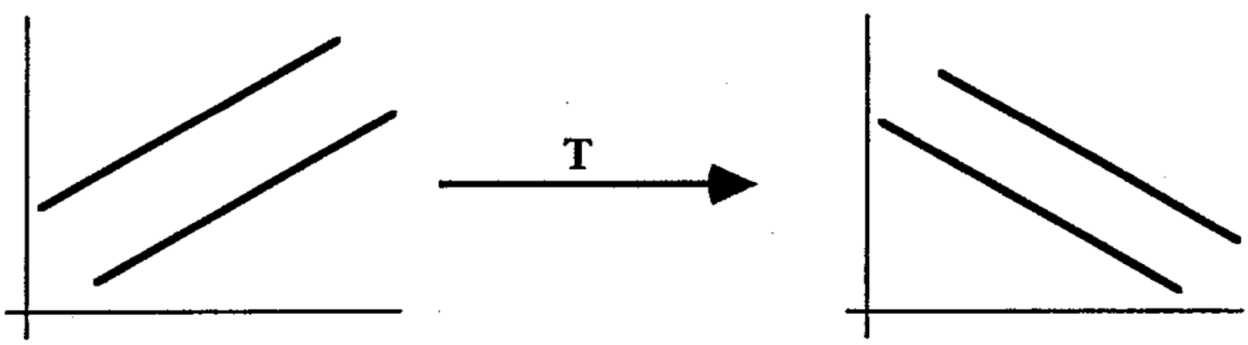
Linhas retas $\xrightarrow{T}$ Linhas retas

(propriedade muito importante em Computação Gráfica)



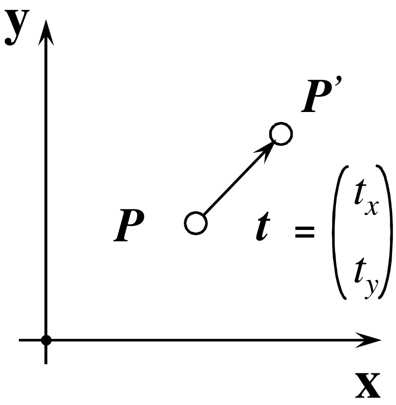
A, B e C são colineares, com C dividindo AB na razão k.

T(A), T(B) e T(C) são colineares, com T(C) dividindo T(AB) na razão k.



Retas paralelas permanecem paralelas.

Transformações Geométricas (translação)



$$\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ ⇦ *Não pode ser escrito na forma* ☒

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$ ⇦ *Ruim para implementação* ☒

Transformações Afins (transformações lineares com translação)

Generalizando:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix}$$

$T\{0\} \neq \{0\}$ $\Rightarrow$ Esta não é uma transformação linear
Porém preserva colinearidade, razão e paralelismo

Transformações desta forma são chamadas: Transformações afins

Coordenadas homogêneas (generalização de transformações lineares para incluir translação)

Como generalizar TL para incluir translação?

⇒ Coordenadas homogêneas

Definição:

Coordenadas homogêneas de $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$: $\begin{Bmatrix} wx \\ wy \\ w \end{Bmatrix}$, $w \neq 0$.

Dado $\begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ w \end{Bmatrix}$ em $\mathbf{R}^3$, é definida uma operação de restrição R, tal que:

R: $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$

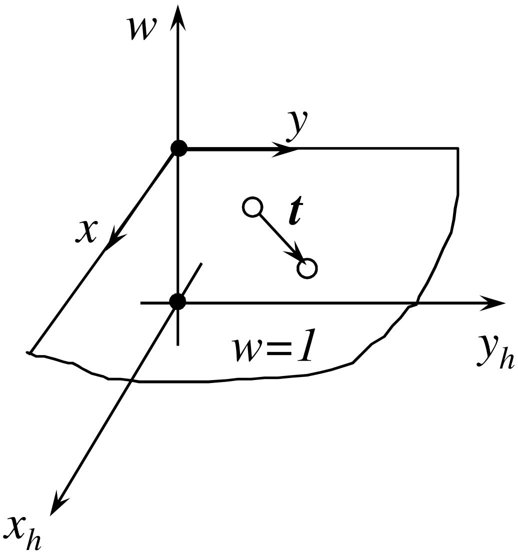
$$\begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ w \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{x^*}{w} \\ \dfrac{y^*}{w} \end{Bmatrix}$$

Coordenadas homogêneas (translação)

Mas como representar translações?

Considere a matriz $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ da transformação de translação T:

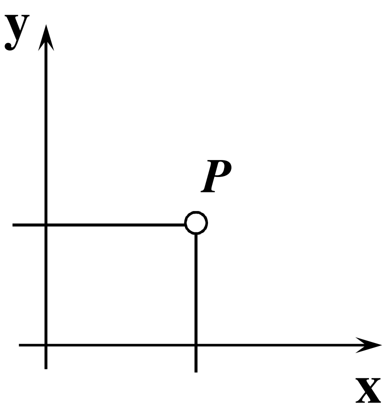
$$[T]\begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x+t_x \\ y+t_y \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad R \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} x+t_x \\ y+t_y \end{Bmatrix}$$



$$\boldsymbol{P'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[T]} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

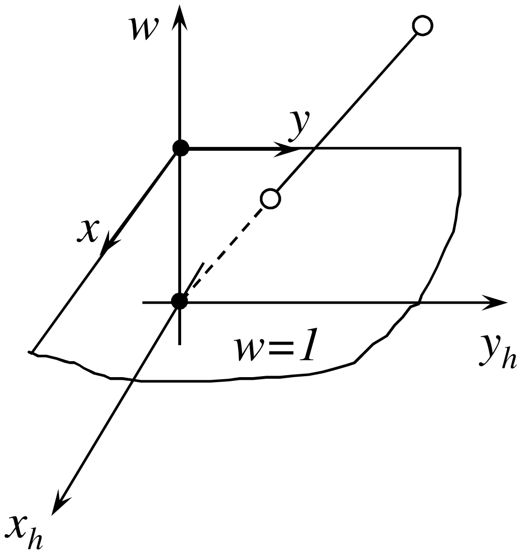
Matriz de Translação

Coordenadas homogêneas



$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} wx \\ wy \\ w \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ w \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} x = x_h/w & \\ & w>0 \\ y = y_h/w & \end{array}}$$



Ex.:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Transformações 2D em coordenadas homogêneas (caso geral)

Mudança do ponto para coordenadas homogêneas:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Cálculo da transformação em coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ p & q & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ w \end{Bmatrix}$$

Onde,

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é a sub-matriz das transformações lineares;

$\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ é a sub-matriz das translações;

$[\, p \quad q \,]$ é a sub-matriz das transformações de projeções cônicas.

Operação de restrição para retornar para coordenadas do plano:

$$\begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ w \end{Bmatrix} \rightarrow R \rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{x^*}{w} \\ \frac{y^*}{w} \end{Bmatrix}$$

Transformações Afins

São transformações que preservam colinearidade, razão e paralelismo.

A matriz de uma transformação afim tem a seguinte forma:

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

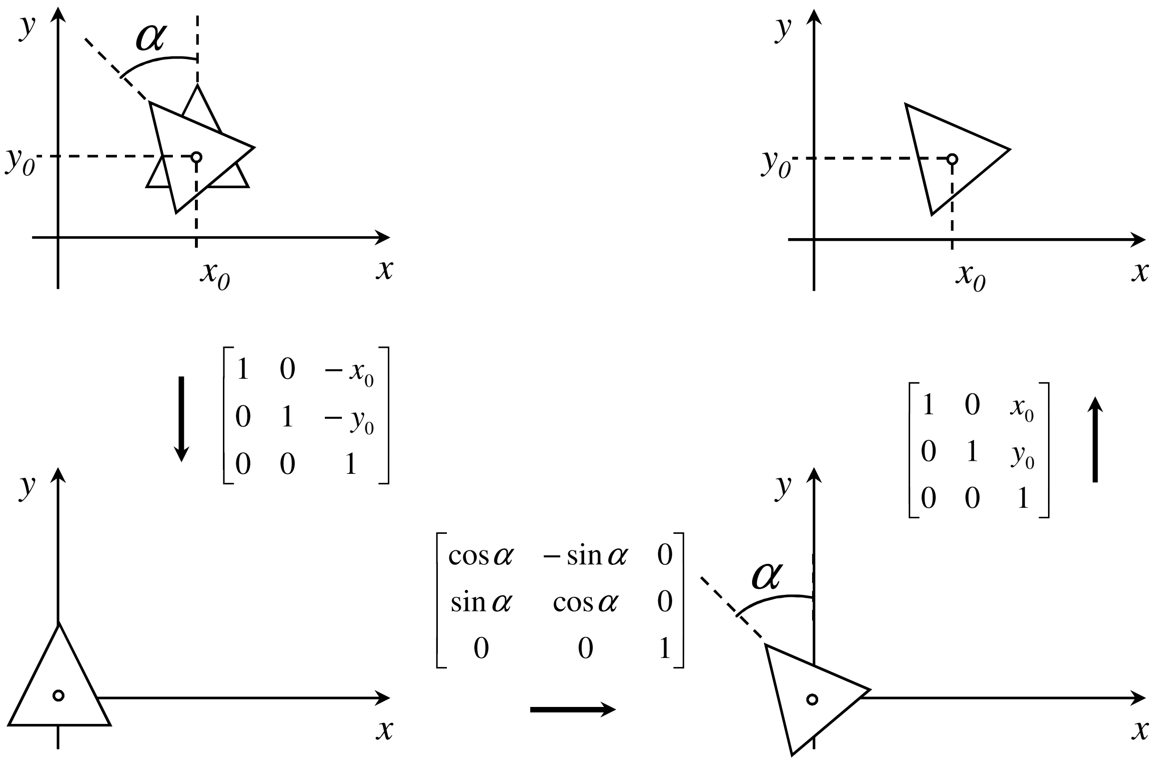
de tal forma que

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Sendo assim, pode-se trabalhar apenas com uma matriz 2x3:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Concatenação



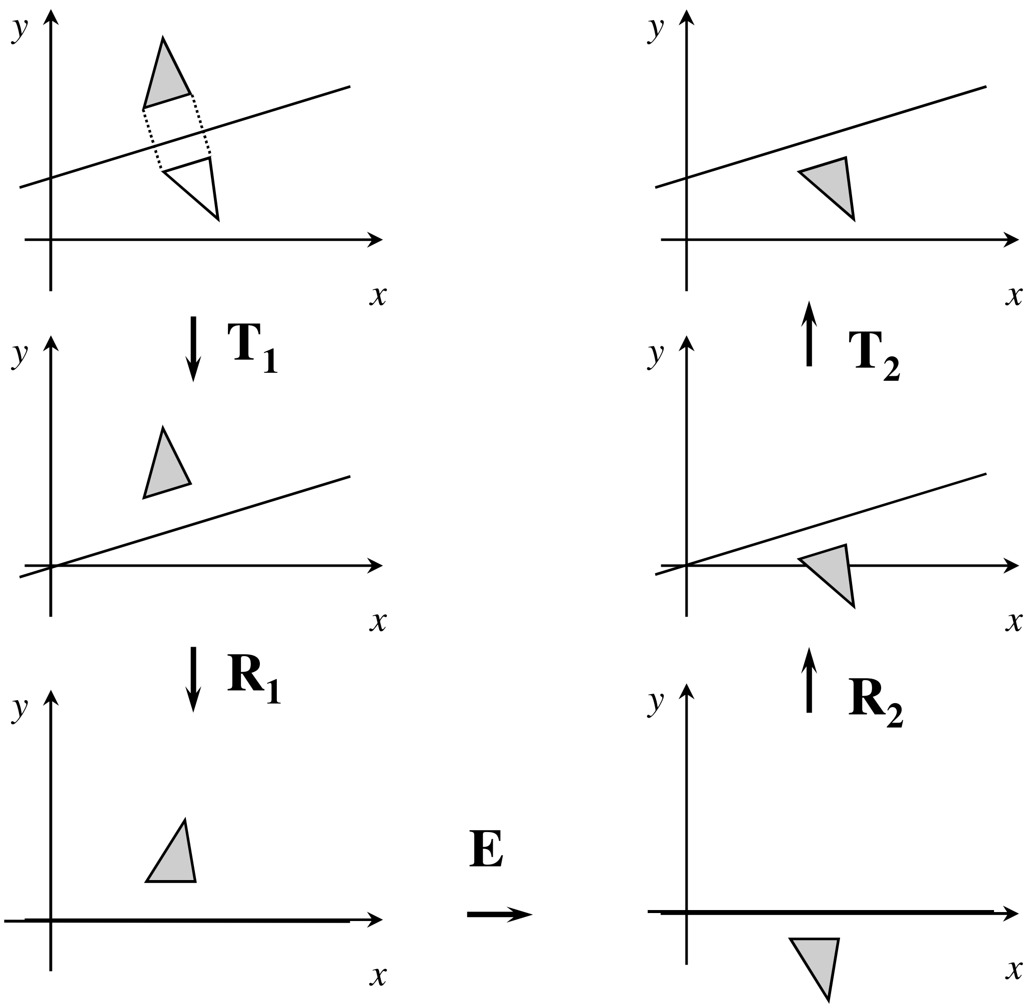
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

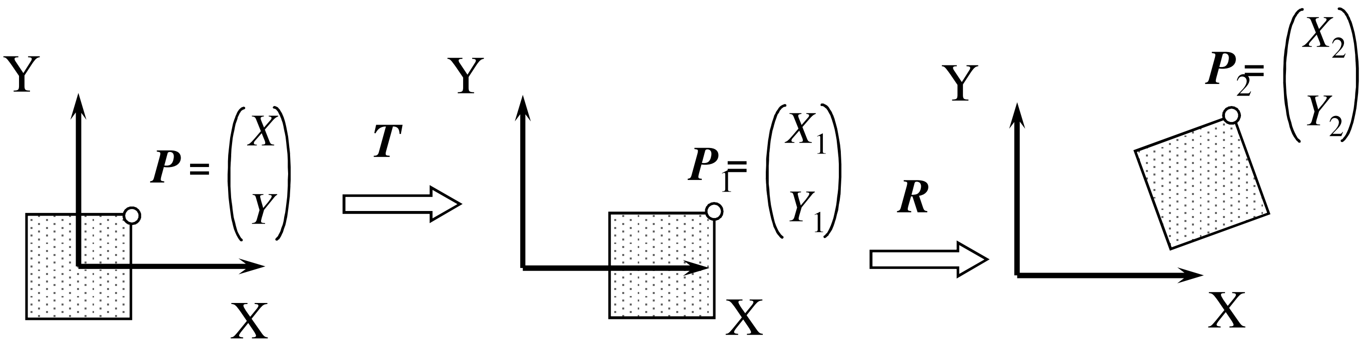
$$\boxed{\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

Concatenação de Transformações

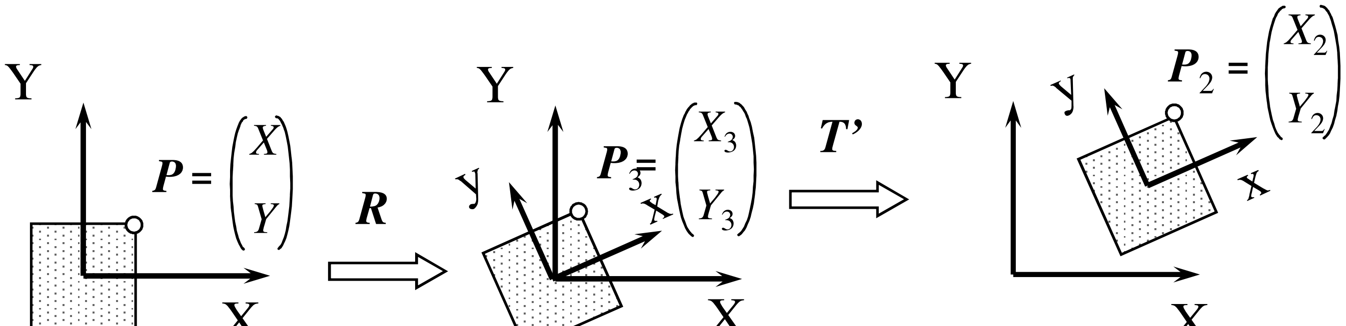


$$\boxed{P' = T_2\, R_2\, E\, R_1\, T_1\, P}$$

Composição com sistema local móvel



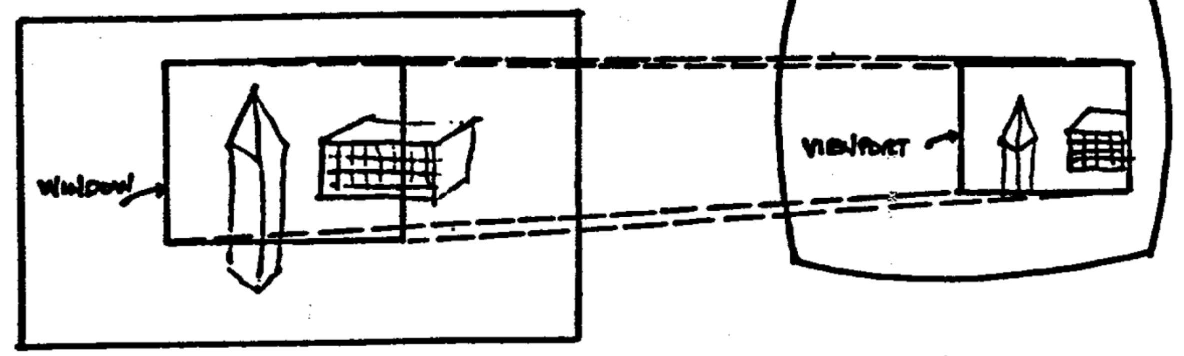
$\boxed{P_1 = T\,P \text{ e } P_2 = R\,P_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_2 = R\,T\,P}$



$T' = R\,T\,R^{-1}$

$\boxed{P_3 = R\,P \;\; e\; P_2 = T'\,P_3 \Rightarrow P_2 = R\,T\,R^{-1}\,R\,P}$ *ou* $\boxed{P_2 = R\,T\,P}$

Transformação Window-Viewport



object coordinate system (world) **screen coordinate system (display)**

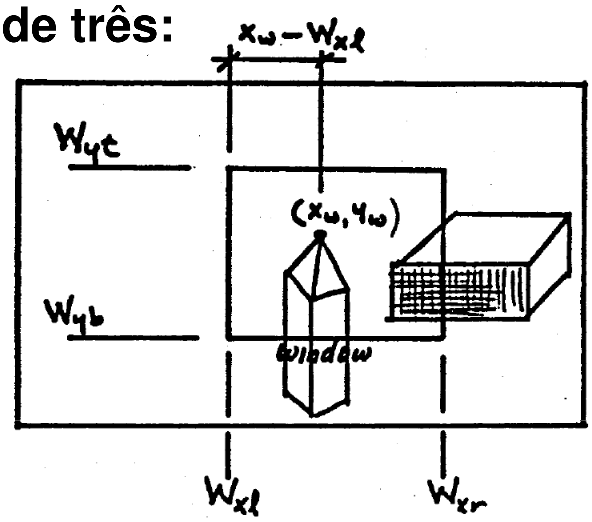
Um *viewport* é uma região na tela, usualmente retangular, dentro do qual a imagem é desenhada. O *viewport* pode ser toda a tela ou uma porção desta.

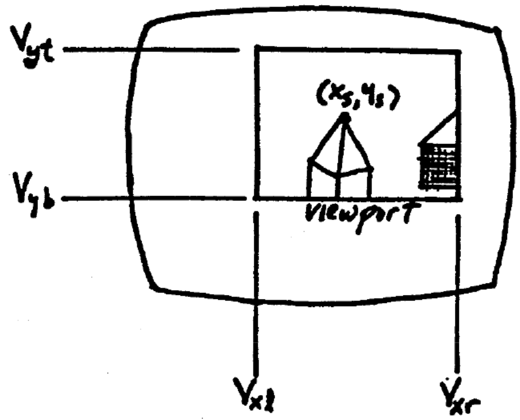
Uma *window* (janela) define a porção do espaço do objeto (mundo) a ser desenhado que vai ser vista no *viewport*. A *window* é definida nas coordenadas do espaço do objeto (*world coordinates*).

A *window* e o *viewport* são uma forma conveniente para definir a transformação da imagem do objeto na tela. Por exemplo, se nós quizermos examinar uma figura grande, nós mantemos os tamanhos da *window* e do *viewport* fixos e movemos a posição da *window*. Isto possibilita percorrer a figura com uma magnificação fixa. Para magnificar ou reduzir a imagem do objeto no *viewport*, basta reduzir ou aumentar o tamanho da *window*, respectivamente.

Transformação Window-Viewport é uma transformação afim

Regra de três:





$$x_s = \underbrace{\frac{(x_w - W_{xl})}{(W_{xr} - W_{xl})}}_{\text{fraction of displacement of full viewport}} \cdot \underbrace{(V_{xr} - V_{xl})}_{\text{viewport width}} + \underbrace{V_{xl}}_{\text{viewport offset}}$$

$$y_s = \frac{(y_w - W_{yb})}{(W_{yt} - W_{yb})} \cdot (V_{yt} - V_{yb}) + V_{yb}$$

$$x_s = \frac{(V_{xr} - V_{xl})}{(W_{xr} - W_{xl})} (x_w - W_{xl}) + V_{xl}$$

$$y_s = \frac{(V_{yt} - V_{yb})}{(W_{yt} - W_{yb})} (y_w - W_{yb}) + V_{yb}$$

Estas equações podem ser reduzidas para uma relação típica de transformações afins, onde os coeficientes a, e, d, f podem ser determinados em função da definição das coordenadas da *window* e do *viewport*.

$$\begin{Bmatrix} x_s \\ y_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & e \\ 0 & d & f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_w \\ y_w \\ 1 \end{Bmatrix}$$