Transformações Lineares e Afins no Plano

Referências Básicas

- Rogers, D.F.; Adams, J.A., Mathematical Elements for Computer Graphics, McGraw-Hill, Second Edition, 1992.
- Menezes, I.F.M.; Gattass, M., *Transformações Geométricas e Projeções*, Relatório Interno nº RI 09/89, Depart. Eng. Civil, PUC-Rio, 1989.

Computação Gráfica Gerativa

=

Modelagem Geométrica + Visualização

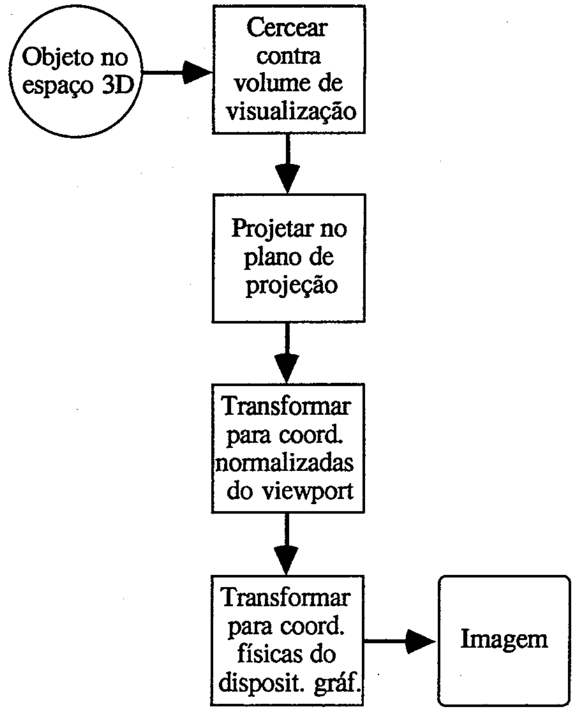
Métodos matemáticos relevantes

1. Geometria Analíticas em $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$ (coordenadas, ângulos, distâncias, equações de planos e retas).
2. Transformações lineares, afins e projetivas.
3. Aplicação à visualização: mudança de base e perspectivas.
4. Modelagem de curvas e superfícies.
5. Modelagem de sólidos.

Objetivo

Como transformar um objeto tridimensional para sua imagem bidimensional em uma janela na tela de um computador ou em uma impressora ou plotadora.

Processo de visualização



Transformações Geométricas

$$T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$$
$$\{P\} \rightarrow \{P'\} = T\{P\}$$

Transformação Linear

$$T(\alpha\{P\} + \beta\{Q\}) = \alpha T\{P\} + \beta T\{Q\}$$

$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$
$\{P\},\{Q\} \in \mathbf{R}^n$

$$\Rightarrow \begin{cases} T\{0\} = \{0\} \\ \{P'\} = T\{P\} = [M]\{P\} \end{cases}$$

Onde as colunas de [M] representam a imagem dos vetores da base no espaço de saída.

Exemplo:

$$T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$$
$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

$$T\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [M]\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{Bmatrix}$$

$$T\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = [M]\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{Bmatrix}$$

$$T\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = [M]\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{Bmatrix}$$

Transformações no plano (2D)

Transformação Linear (TL)

$$T\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

$$T\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a \\ c \end{Bmatrix} \qquad T\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b \\ d \end{Bmatrix}$$

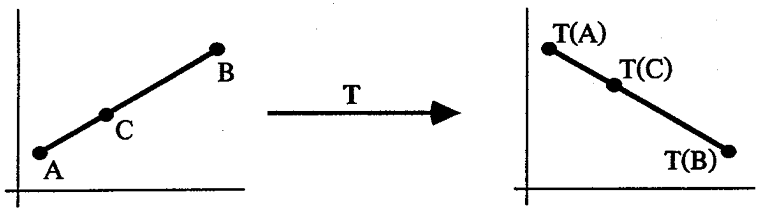
Transformação lineares conhecidas

- reflexão
- rotação
- escala
- cisalhamento

Propriedades das transformações lineares

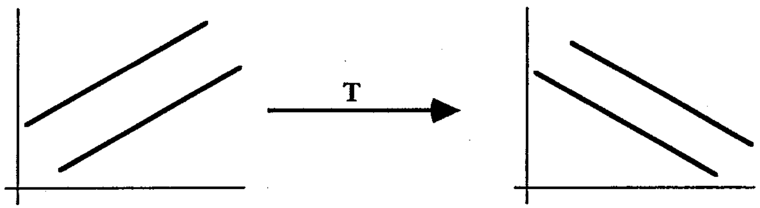
Linhas retas $\xrightarrow{T}$ Linhas retas

(propriedade muito importante em Computação Gráfica)



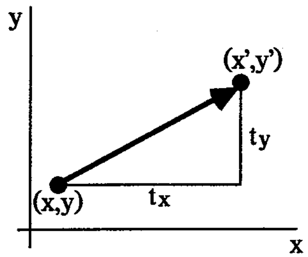
A, B e C são colineares, com C dividindo AB na razão k.

T(A), T(B) e T(C) são colineares, com T(C) dividindo T(AB) na razão k.



Retas paralelas permanecem paralelas.

E a translação é uma transformação linear?



$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}$$

<u>Generalizando:</u>

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix}$$

$T\{0\} \neq \{0\}$ $\Rightarrow$ Esta não é uma transformação linear
Porém preserva colinearidade, razão e paralelismo

Transformações desta forma são chamadas: <u>Transformações afins</u>

Como generalizar TL para incluir translação?

⇒ Coordenadas homogêneas

Definição:

Coordenadas homogêneas de $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$: $\begin{Bmatrix} wx \\ wy \\ w \end{Bmatrix}$, $w \neq 0$.

Dado $\begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ w \end{Bmatrix}$ em R^3, é definida uma operação de restrição R, tal que:

$$R: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$\begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ w \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{x^*}{w} \\ \frac{y^*}{w} \end{Bmatrix}$$

Mas como representar translações?

Considere a matriz $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ da transformação de translação T:

$$[T]\begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x+t_x \\ y+t_y \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow R \rightarrow \begin{Bmatrix} x+t_x \\ y+t_y \end{Bmatrix}$$

Transformações 2D em coordenadas homogêneas (caso geral)

Mudança do ponto para coordenadas homogêneas:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Cálculo da transformação em coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ p & q & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ w \end{Bmatrix}$$

Onde,

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é a sub-matriz das transformações lineares;

$\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ é a sub-matriz das translações;

$[\, p \quad q \,]$ é a sub-matriz das transformações de projeções cônicas.

Operação de restrição para retornar para coordenadas do plano:

$$\begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ w \end{Bmatrix} \rightarrow R \rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{x^*}{w} \\ \frac{y^*}{w} \end{Bmatrix}$$

Transformações Afins

São transformações que preservam colinearidade, razão e paralelismo.

A matriz de uma transformação afim tem a seguinte forma:

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

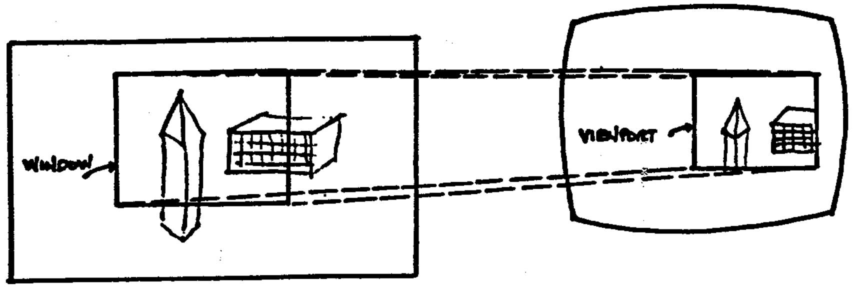
de tal forma que

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Sendo assim, pode-se trabalhar apenas com uma matriz 2x3:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Transformação window/viewport



object coordinate system
(world)

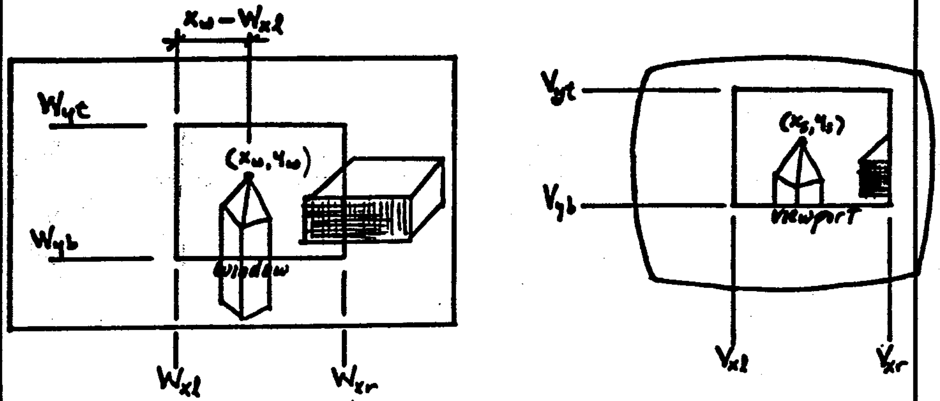
(normalized)
screen coordinate system
(display)

Um *viewport* é uma região na tela, usualmente retangular, dentro do qual a imagem é desenhada. O *viewport* pode ser toda a tela ou uma porção desta. No modelo GKS, o *viewport* é definido em coordenadas normalizadas entre 0 e 1.

Uma *window* (janela) define a porção do espaço do objeto (mundo) a ser desenhado que vai ser vista no *viewport*. A *window* é definida nas coordenadas do espaço do objeto (*world coordinates*).

A *window* e o *viewport* são uma forma conveniente para definir a transformação da imagem do objeto na tela. Por exemplo, se nós quizermos examinar uma figura grande, nós mantemos os tamanhos da *window* e do *viewport* fixos e movemos a posição da *window*. Isto possibilita percorrer a figura com uma magnificação fixa. Para magnificar ou reduzir a imagem do objeto no *viewport*, basta reduzir ou aumentar o tamanho da *window*, respectivamente.

Transformação window/viewport também é afim



$$x_s = \underbrace{\frac{(x_w - W_{xl})}{(W_{xr} - W_{xl})}}_{\substack{\text{fraction of dis-}\\ \text{placement of}\\ \text{full viewport}}} \cdot \underbrace{(V_{xr} - V_{xl})}_{\substack{\text{viewport}\\ \text{width}}} + \underbrace{V_{xl}}_{\substack{\text{viewport}\\ \text{offset}}}$$

$$y_s = \frac{(y_w - W_{yb})}{(W_{yt} - W_{yb})} \cdot (V_{yt} - V_{yb}) + V_{yb}$$

$$x_s = \frac{(V_{xr} - V_{xl})}{(W_{xr} - W_{xl})} (x_w - W_{xl}) + V_{xl}$$

$$y_s = \frac{(V_{yt} - V_{yb})}{(W_{yt} - W_{yb})} (y_w - W_{yb}) + V_{yb}$$

Estas equações podem ser reduzidas para uma relação típica de transformações afins, onde os coeficientes a, e, d, f podem ser determinados em função da definição das coordenadas da *window* e do *viewport*

$$\begin{Bmatrix} x_s \\ y_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & e \\ 0 & d & f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_w \\ y_w \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro — PUC-Rio

TRANSPARÊNCIAS:

TRANSFORMAÇÕES EM 2D E 3D
E
PROJEÇÕES PARALELAS

Marcelo Gattass

Rio de Janeiro, Agosto de 1993

TRANSFORMAÇÕES NO PLANO (2D)

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

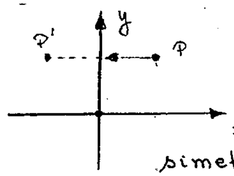
$P \mapsto P' = T(P)$

1. T linear

se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ $\quad \boxed{T(\alpha P_1 + \beta P_2) = \alpha T(P_1) + \beta T(P_2)}$

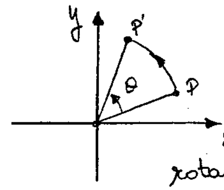
$$\Rightarrow \begin{cases} T(\emptyset) = \emptyset \\ P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ e } P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow T(P) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases}$$

2. Transformações lineares conhecidas



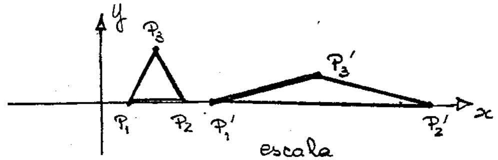
simetria

$\begin{bmatrix} -1 & \emptyset \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix}$;



rotação

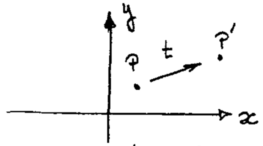
$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$



escala

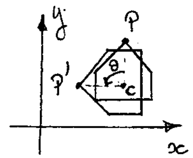
$\begin{bmatrix} 4 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset.5 \end{bmatrix} =$

Mas e estas transformações ?

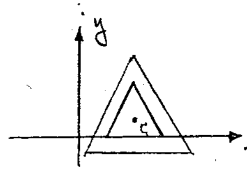


translação

$P' = P + t$

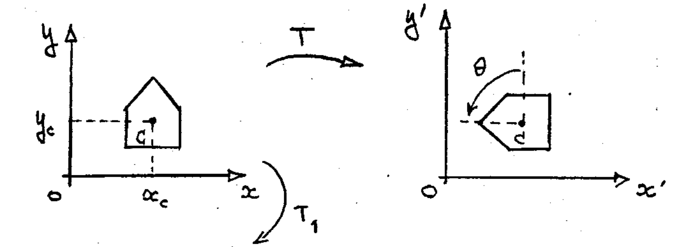


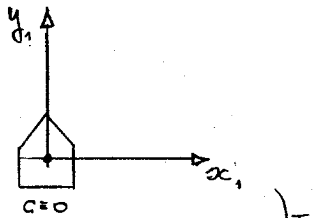
rotação em relação a um ponto



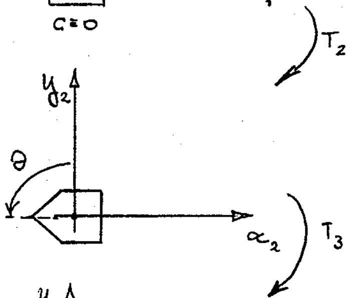
escala em relação a um ponto

$\boxed{T(\emptyset) \neq \emptyset \Rightarrow \text{Não são lineares!}}$

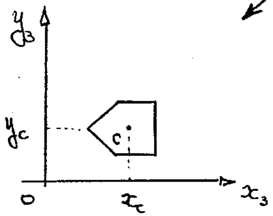




$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix}$$

Se fossem T.L.

$$P' = P_3 = M_3 P_2 = M_3 M_2 P_1 = \underbrace{M_3 M_2 M_1}_{[M]} P \Rightarrow \quad P' = MP$$

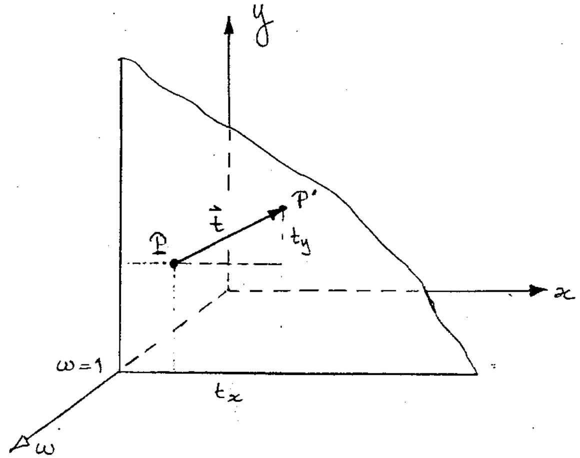
COORDENADAS HOMOGÊNEAS

(Motivação)

Considere a seguinte transformação

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \omega \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + t_x \omega \\ y + t_y \omega \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \omega \end{pmatrix}$$



$$R: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \omega \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x/\omega \\ y/\omega \end{pmatrix}$$

$\omega \neq 0$

$$\boxed{R(T_L(R(\vec{P}))) \stackrel{?}{=} R(T_L(\vec{P}))}$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} R(\vec{P}) = \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ T_L(\vec{P}) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$R(T_L(\vec{P})) = \begin{pmatrix} (m_{11}x + m_{12}y + m_{13}w)/(m_{31}x + m_{32}y + m_{33}w) \\ (m_{21}x + m_{22}y + m_{23}w)/(m_{31}x + m_{32}y + m_{33}w) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R(T_L(R(\vec{P}))) = R\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ 1 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} m_{11}x/w + m_{12}y/w + m_{13} \\ m_{21}x/w + m_{22}y/w + m_{23} \\ m_{31}x/w + m_{32}y/w + m_{33} \end{pmatrix}$$

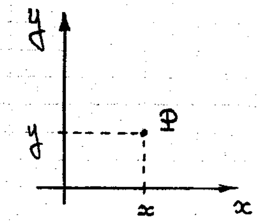
$$= \begin{pmatrix} (m_{11}x/w + m_{12}y/w + m_{13})/(m_{31}x/w + m_{32}y/w + m_{33}) \\ (m_{21}x/w + m_{22}y/w + m_{23})/(m_{31}x/w + m_{32}y/w + m_{33}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (m_{11}x + m_{12}y + m_{13}w)/(m_{31}x + m_{32}y + m_{33}w) \\ (m_{21}x + m_{22}y + m_{23}w)/(m_{31}x + m_{32}y + m_{33}w) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= R(T_L(\vec{P})) \quad \checkmark \quad \text{c.q.d.}$$

$\Rightarrow$ Algumas transformações no $\mathbb{R}^2$ podem ser tratadas como uma restrição sobre transformações lineares no $\mathbb{R}^3$

COORDENADAS HOMOGÊNEAS

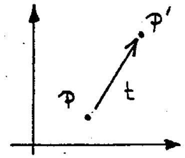


$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} wx \\ wy \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ w \end{bmatrix} \qquad w \neq 0$$

$$x = x_h / w$$

$$y = y_h / w$$

Translação:



$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

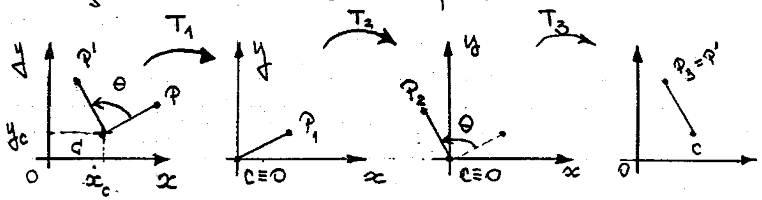
$\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset & t_x \\ \emptyset & 1 & t_y \\ \emptyset & \emptyset & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

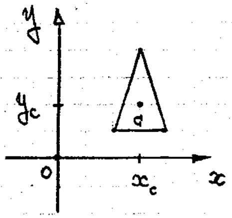
Rotação em torno de um ponto



$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_c \\ 0 & 1 & -y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_c \\ 0 & 1 & y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

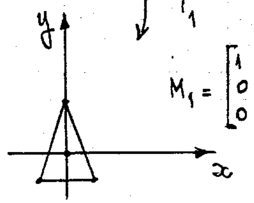
$$P' = P_3 = M_3 P_2 = M_3 (M_2 P_1) = M_3 M_2 M_1 P$$

EVALUATE TRANSFORMATION MATRIX

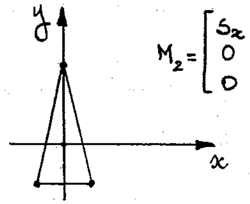


Escala s_x, s_y
Rotação φ
Translação t_x, t_y
} em torno de (x_c, y_c)

$\downarrow T_1$

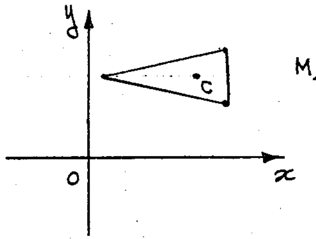


$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_c \\ 0 & 1 & -y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_2}$$

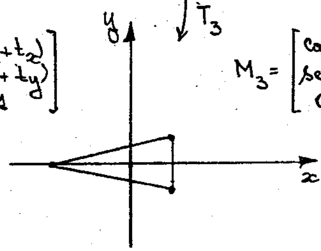


$$M_2 = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\xleftarrow{T_4}$ $\downarrow T_3$



$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (x_c+t_x) \\ 0 & 1 & (y_c+t_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



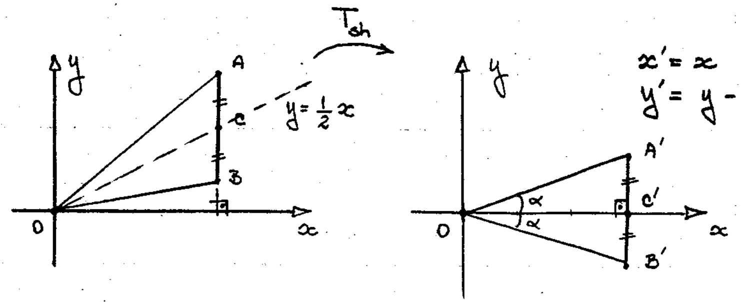
$$M_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (x_c+t_x) \\ 0 & 1 & (y_c+t_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_c \\ 0 & 1 & -y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ACCUMULATE TRANSFORMATION MATRIX

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (x_c+t_x) \\ 0 & 1 & (y_c+t_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_c \\ 0 & 1 & -y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

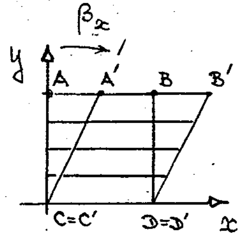
CISALHAMENTO ("SHEAR")



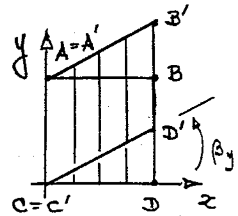
$x' = x$
$y' = y - \frac{x}{2}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Em geral

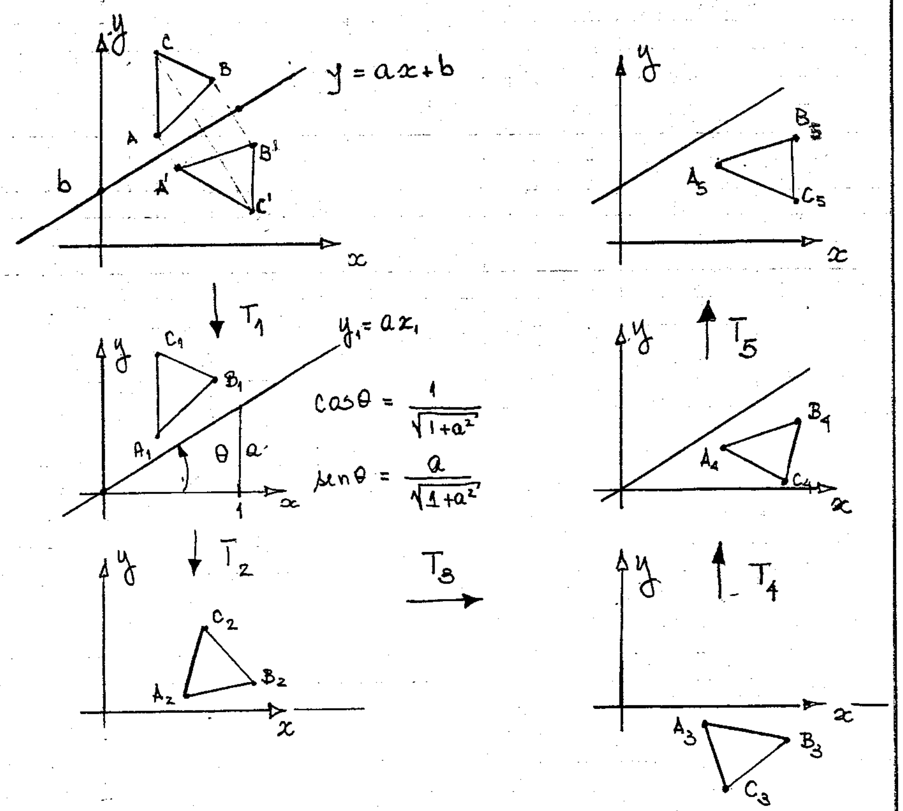


$$M_{sh_x} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \tan\beta_x = sh_x$$



$$M_{sh_y} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \tan\beta_y = sh_y$$

Reflexão em Torno de um Eixo Qualquer



$$M = \underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&b\\0&0&1\end{bmatrix}}_{M_5}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\begin{bmatrix}1&-a&0\\a&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)}_{M_4}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{M_3}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\begin{bmatrix}1&a&0\\-a&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)}_{M_2}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-b\\0&0&1\end{bmatrix}}_{M_1}$$

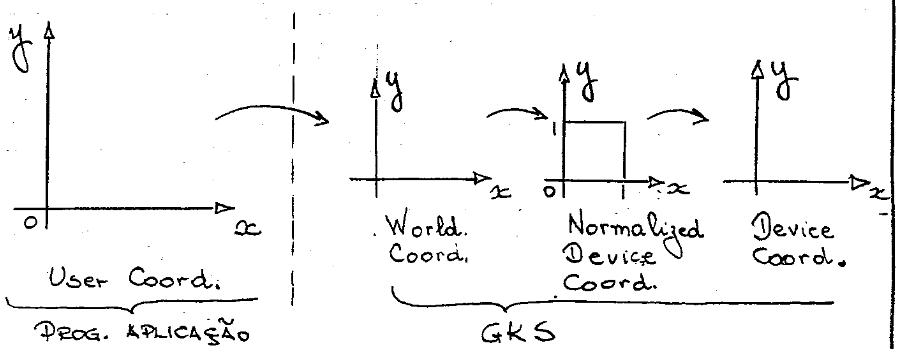
Interface com o GKS

1. A NÍVEL DE SEGMENTO

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23}\end{bmatrix}$$ calculada pela aplicação

SET SEGMENT TRANSFORMATION (SEGNA, M)

2. A NÍVEL DE VISUALIZAÇÃO



Manter sempre uma matriz M(3,3) no programa
Antes de enviar coordenadas para o GKS

$$x_h = m_{11}x + m_{12}y + m_{13}$$
$$y_h = m_{21}x + m_{22}y + m_{23}$$
$$w = m_{31}x + m_{32}y + m_{33}$$

se $(w \neq 0)$ faça

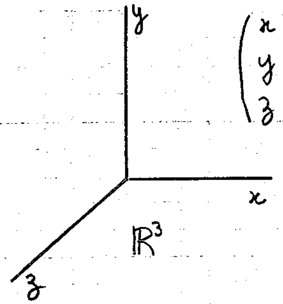
$$x = x_h/w$$
$$y = y_h/w$$

fim de se

TRANFORMAÇÕES EM 3D

1) Translação

$$M_t = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

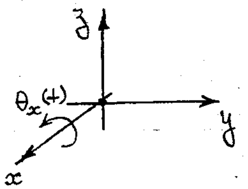


$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

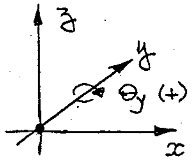
2) Escala

$$M_s = \left[\begin{array}{ccc|c} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

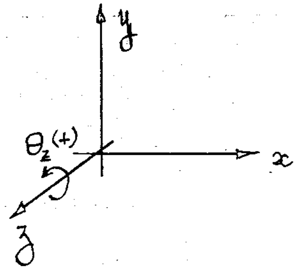
3) Rotação



$$M_{\theta_x} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\text{sen}\,\theta_x & 0 \\ 0 & \text{sen}\,\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

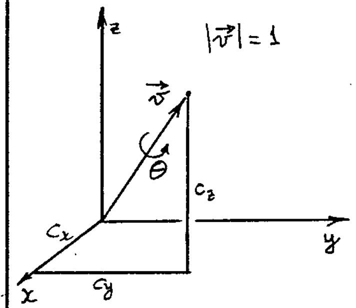


$$M_{\theta_y} = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\theta_y & 0 & \text{sen}\,\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\,\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$



$$M_{\theta_z} = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\theta_z & -\text{sen}\,\theta_z & 0 & 0 \\ \text{sen}\,\theta_z & \cos\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

4) Rotação em torno de uma direção $\vec{v}$ passando pela origem



$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = c_x^2 + \cos\theta.(1 - c_x^2)$$

$$m_{12} = c_x c_y.(1 - \cos\theta) + c_z.\text{sen}\,\theta$$

$$m_{13} = c_z c_x.(1 - \cos\theta) - c_y.\text{sen}\,\theta$$

$$m_{21} = c_x c_y.(1 - \cos\theta) - c_z.\text{sen}\,\theta$$

$$m_{22} = c_y^2 + \cos\theta.(1 - c_y^2)$$

$$m_{23} = c_y c_z.(1 - \cos\theta) + c_x.\text{sen}\,\theta$$

$$m_{31} = c_z c_x.(1 - \cos\theta) + c_y.\text{sen}\,\theta$$

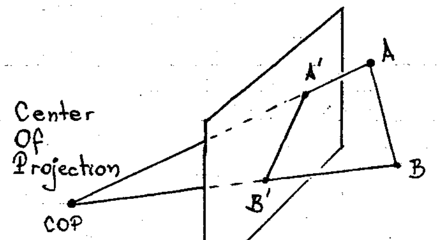
$$m_{32} = c_y c_z.(1 - \cos\theta) - c_x.\text{sen}\,\theta$$

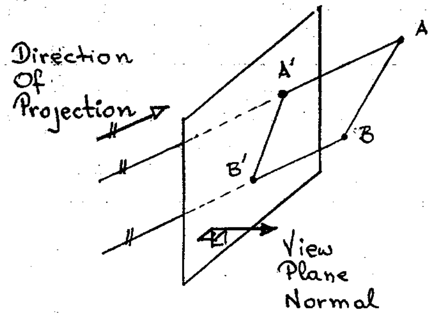
$$m_{33} = c_z^2 + \cos\theta.(1 - c_z^2)$$

PROJEÇÕES

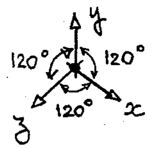
1. TIPOS

Perspectivas (Cônicas) — Paralelas

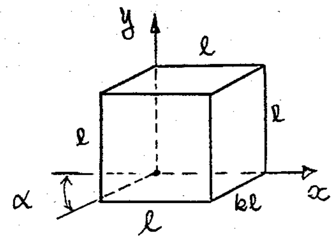




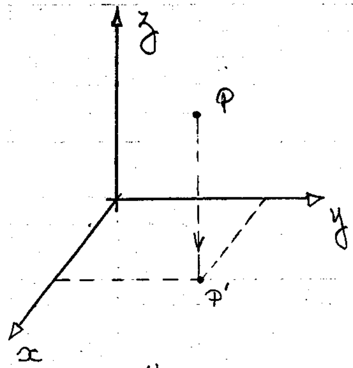
- Perspectivas { 1, 2 ou 3 pontos de fuga
- Paralelas
  - Ortográficas ($\overrightarrow{DOP} \parallel \overrightarrow{VPN}$) { plantas e elevações (xy, yz, ...); isométricos



  - Cavaleiras e "Cabinet"
    - $k = 1, 2/3, 1/2, 1/3$
    - $\alpha = 30°, 45°, 60°$

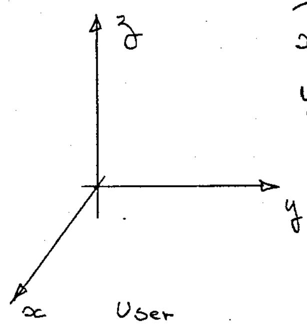


PROJEÇÕES ORTHOGRÁFICAS



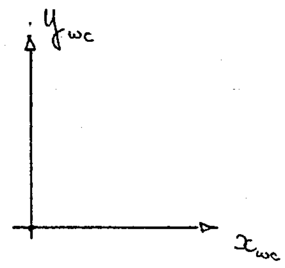
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

User Coord.



$x_{wc} = x$

$y_{wc} = y$

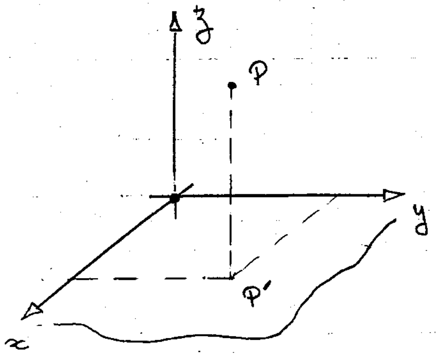


User Coord. — World Coord.

$$\begin{bmatrix} x_{wc} \\ y_{wc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

PROJEÇÃO É UMA TRANSF. LINEAR ?



$$\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$$

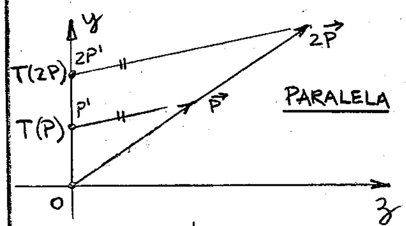
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix}$$

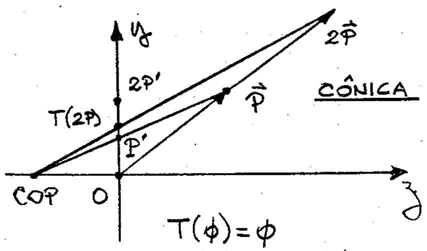
$$\| \quad \checkmark$$

$$\alpha T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \beta T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix}$$

PROJ. PARALELAS EM PLANOS QUE PASSAM PELA ORIGEM



$T(\phi) = \phi$
$T(2P) = 2T(P)$



$T(\phi) = \phi$
$T(2P) \neq 2T(P)$

Mas como determinar a matriz da transformação linear de projeções paralelas em planos que passam por 0?

$$T: \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Quem é m_{ij} ?

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{pmatrix}$$

$$\|$$

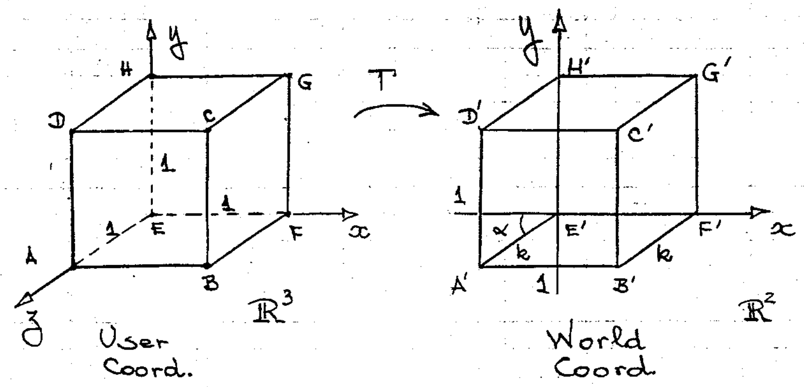
$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \quad \cdots \quad = \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T(\hat{e}_j) = \begin{bmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ \vdots \end{bmatrix}}$$

PROJEÇÕES CAVALEIRA E "CABINET"



T é linear

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = T(F) = F' = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = T(H) = H' = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = T(A) = A' = \begin{pmatrix}-k\cos\alpha\\-k\,\text{sen}\,\alpha\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c:c:c}1 & 0 & -k\cos\alpha\\ 0 & 1 & -k\,\text{sen}\,\alpha\end{array}\right]$$

CAVALHEIRA ($k=1$, $\alpha=45°$)

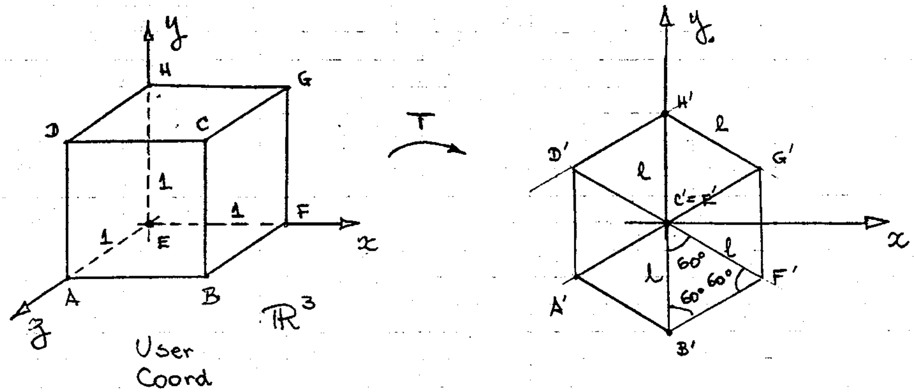
$$\begin{bmatrix}x_{wc}\\y_{wc}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1/\sqrt{2}\\0 & 1 & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

CABINET ($k=0.5$, $\alpha=30°$)

$$\begin{bmatrix}x_{wc}\\y_{wc}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -0.433\\0 & 1 & -0.250\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

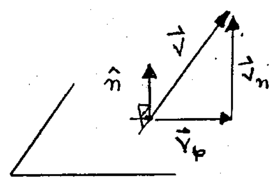
$$\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -k\cos\alpha & 0\\ 0 & 1 & -k\,\text{sen}\,\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

PROJEÇÕES ISOMÉTRICAS



ISO-MÉTRICA $\Rightarrow \overrightarrow{VPN} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $(= \overrightarrow{DOP})$

PROJEÇÃO DE UM VETOR NUM PLANO



$$\vec{v}_n = (\vec{v}\cdot\hat{n})\,\hat{n}$$

$$\vec{v}_p = \vec{v} - \vec{v}_n$$

PROJEÇÃO DA BASE NO PLANO $x+y+z=0$

$$P\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \left[\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\-1/3\end{pmatrix}$$

$$P\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\-1/3\end{pmatrix}$$

$$P\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3\\-1/3\\2/3\end{pmatrix}$$

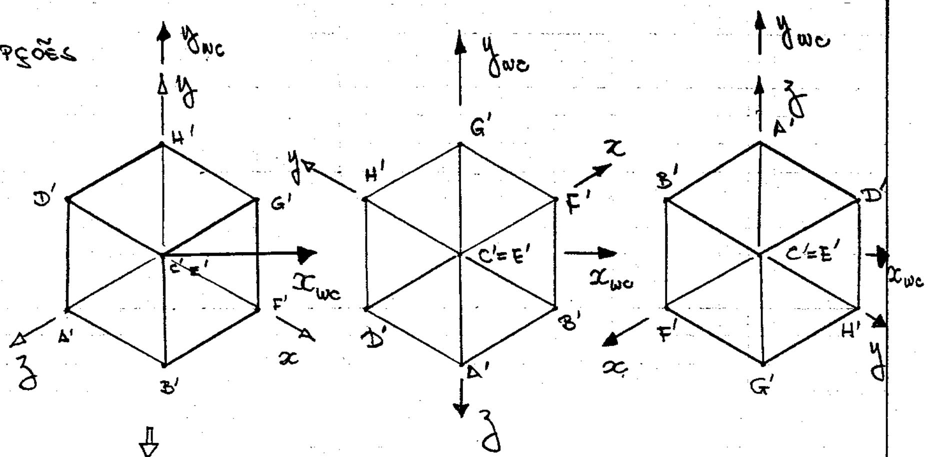
Obs. $\left\|P\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\| = \left\|P\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\| = \left\|P\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$$\Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0.8165$$

√ok

ISOMÉTRICAS (CONT.)

OPÇÕES



⇩

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = T(F) = F' = \begin{pmatrix}l\cos 30^\circ\\ -l\,\mathrm{sen}\,30^\circ\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{6}}{3}\,\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.7071\\ -0.4082\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = T(H) = H' = \begin{pmatrix}0\\ l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \sqrt{6}/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0.8165\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = T(A) = A' = \begin{pmatrix}-l\cos 30^\circ\\ -l\,\mathrm{sen}\,30^\circ\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0.7071\\ -0.4082\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_{wc}\\ y_{wc}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0.7071 & 0. & -0.7071\\ -0.4082 & 0.8165 & -0.4082\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$