

# Exemplo de trabalho de Análise de Estruturas com uso do Ftool

## Simulação computacional do Método das Forças

Estude o tutorial sobre o Método das Forças disponível em "<http://www.tecgraf.puc-rio.br/etools/metfor>" (versão *on-line*) ou em "[http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp\\_pub/lfm/metfor1\\_0\\_0.exe](http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp_pub/lfm/metfor1_0_0.exe)" (versão *off-line*). Obtenha a programa Ftool e seu manual em "<http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftool>". Siga os passos descritos nos itens abaixo e escreva um relatório. Este relatório deve conter as figuras que forem necessárias para descrever a simulação e seus valores numéricos.

### Item (a) – Estrutura original a ser resolvida

Defina arbitrariamente, usando o programa Ftool, um quadro plano hiperestático com grau de hiperestaticidade no mínimo igual a quatro ( $g \geq 4$ ) e que não contenha ciclos fechados de barras. Defina também as propriedades elásticas e geométricas das barras e as cargas que atuam no quadro. Adote todas as unidades em kN e m. Crie uma figura com a estrutura, suas dimensões e todas as propriedades e cargas utilizadas. Essa figura deve mostrar a configuração deformada da estrutura, com as componentes de reação de apoio indicadas. Anote nessa figura as componentes de reações de apoio que serão escolhidas como incógnitas da solução da estrutura pelo Método das Forças. Estas incógnitas são chamadas de *hiperestáticos* e devem ser identificadas pelo nome  $X_j$ , sendo  $j$  o número do hiperestático. Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os hiperestáticos com seus nomes, valores e unidades à mão. Anote os valores das reações de apoio (com sinal) selecionadas como incógnitas do problema para usar no item (f).

### Item (b) – Sistema Principal

Obtenha uma estrutura isostática a partir da eliminação dos vínculos externos (liberação de restrições de apoio) associados aos hiperestáticos escolhidos no item (a). Essa estrutura será o Sistema Principal (SP) para a resolução do quadro original hiperestático pelo Método das Forças. Crie uma figura com o SP adotado e os hiperestáticos com seus nomes. Embora seja possível, neste trabalho não libere vínculos internos, isto é, não introduza rótulas.

### Item (c) – Caso básico (0)

Para o Sistema Principal do item (b) considere valores nulos para os hiperestáticos e aplique o carregamento externo do item (a). Isto corresponde ao caso (0) do Método das Forças. Mostre a configuração deformada dessa estrutura juntamente com o carregamento aplicado, indicando as componentes de deslocamentos e rotações (com valores e unidades) nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos termos de carga  $\delta_0$ . Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores (com sinal) e unidades dos termos de carga à mão.

### Item (d) – Casos básicos que isolam os hiperestáticos

Retire as cargas utilizadas no item (c) e carregue o Sistema Principal, alternadamente, com os hiperestáticos com valores unitários. Isto deve gerar um caso de carregamento para cada hiperestático (com valor unitário) atuando independentemente, sendo que cada um corresponde a um dos casos ( $j$ ) do Método das Forças, onde  $j$  é o número de um hiperestático. Mostre a configuração deformada da estrutura para cada um dos hiperestáticos unitários impostos, indicando as componentes de deslocamentos e rotações (com valores, sinais e unidades) nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos *coeficientes de flexibilidade*  $\delta_j$ . Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores, sinais e unidades dos coeficientes de flexibilidade à mão.

### Item (e) – Sistema de equações de compatibilidade

Com base nos resultados dos itens (c) e (d), monte o sistema de equações de compatibilidade que resulta da solução do quadro original pelo Método das Forças. Os valores numéricos dos coeficientes deste sistema de equações são obtidos dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade.

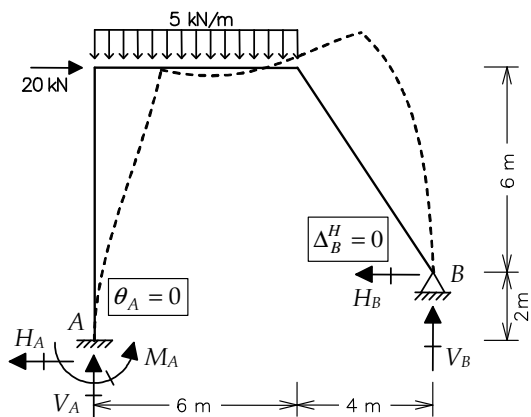
### Item (f) – Verificação da solução do sistema de equações de compatibilidade

Com base nos resultados da estrutura original do item (a), verifique se os valores dos hiperestáticos correspondem realmente à solução do sistema de compatibilidade obtido no item (e).

### Item (g) – Obtenção de esforços internos

Indique os passos seguintes à solução do sistema de equações de compatibilidade que seriam necessários para complementar o cálculo dos esforços internos da estrutura pelo Método das Forças.

## Exemplo de solução de um pórtico com 2 hiperestáticos pelo Método das Forças



A configuração deformada do quadro da figura acima é mostrada de forma exagerada (o fator de amplificação dos deslocamentos da deformada é igual a 1000).

Área da seção transversal das barras:  $A = 0.005 \text{ m}^2$

Momento de inércia da seção transversal:  $I = 0.0005 \text{ m}^4$

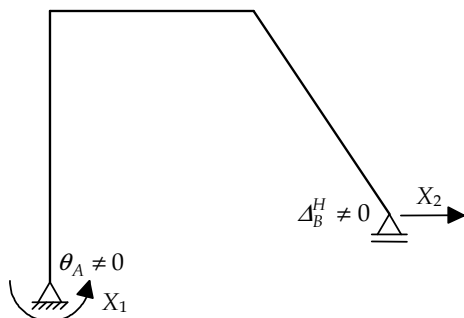
Módulo de elasticidade do material:  $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$

A metodologia utilizada pelo Método das Forças para analisar uma estrutura hiperestática é: "somar uma série de soluções básicas que satisfazem as condições de equilíbrio, mas não satisfazem as condições de compatibilidade da estrutura original, para na superposição restabelecer as condições de compatibilidade."

Cada solução básica isoladamente não satisfaz as condições de compatibilidade da estrutura original. Estas condições ficam restabelecidas quando se superpõe todas as soluções básicas.

A estrutura utilizada para a superposição de soluções básicas é, em geral, uma estrutura isostática obtida a partir da estrutura original pela eliminação de vínculos. Esta estrutura isostática é chamada de *Sistema Principal (SP)*. As forças ou momentos associados aos vínculos liberados são as incógnitas do problema e são chamados de *hiperestáticos*.

O Sistema Principal (SP) adotado neste exemplo é a estrutura isostática mostrada na figura abaixo.



Observa-se que foram eliminados dois vínculos externos da estrutura original: a imposição de rotação  $\theta_A$  nula do apoio da esquerda e a imposição de deslocamento horizontal  $\Delta_B^H$  nulo do apoio da direita. O número de vínculos que devem ser eliminados para transformar a estrutura hiperestática original em uma estrutura isostática é igual ao grau de hiperestaticidade,  $g$ . A escolha do Sistema Principal é arbitrária: qualquer estrutura isostática escolhida é válida, desde que seja estável estaticamente.

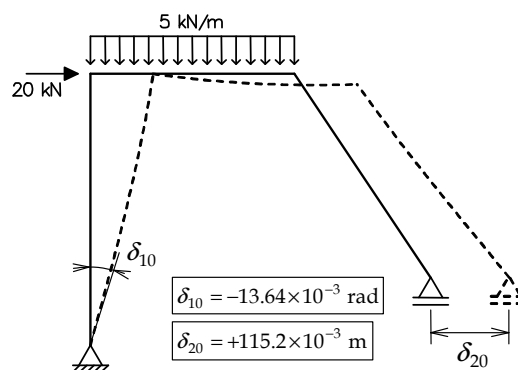
Os esforços associados aos vínculos eliminados são as reações de apoio  $M_A$  e  $H_B$ , que estão indicadas na figura ao lado. Esses esforços são chamados de *hiperestáticos* e são as incógnitas da solução pelo Método das Forças. Utiliza-se a nomenclatura  $X_i$  para indicar os hiperestáticos, sendo  $i$  o seu índice, que varia de 1 a  $g$ . No exemplo:

$X_1 = M_A$ : reação momento associada à restrição  $\theta_A = 0$ ;

$X_2 = H_B$ : reação horizontal associada à restrição  $\Delta_B^H = 0$ .

A solução do problema pelo Método das Forças recai em encontrar os valores  $X_1$  e  $X_2$  que fazem com que, juntamente com o carregamento aplicado,  $\theta_A = 0$  e  $\Delta_B^H = 0$ . A determinação de  $X_1$  e  $X_2$  é feita através de superposição de casos básicos, utilizando o SP como estrutura para as soluções básicas. O número de casos básicos é sempre igual ao grau de hiperestaticidade mais um ( $g+1$ ). No exemplo, isso resulta nos casos (0), (1) e (2) que são mostrados a seguir.

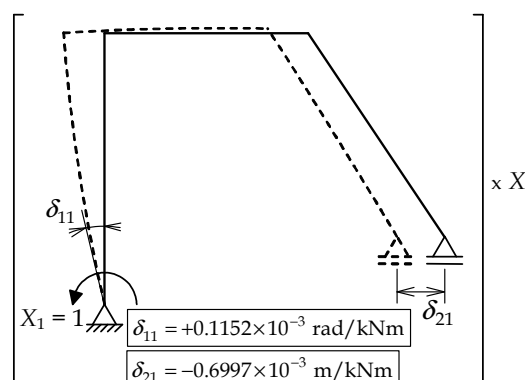
Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SP



A figura acima mostra a configuração deformada (com fator de amplificação igual a 20) do SP no caso (0). A rotação  $\delta_{10}$  e o deslocamento horizontal  $\delta_{20}$ , nas direções dos vínculos eliminados para a criação do SP, são chamados de *termos de carga*, cujos valores para esta estrutura estão indicados na figura.

O sinal negativo da rotação  $\delta_{10}$  indica que a rotação tem o sentido contrário do que é considerado para o hiperestático  $X_1$  no caso (1) a seguir. Analogamente, o sinal positivo de  $\delta_{20}$  indica que este deslocamento tem o mesmo sentido que é considerado para o hiperestático  $X_2$  no caso (2) a seguir. O cálculo dos coeficientes que aparecem na formulação do Método das Forças pode ser feito pelo Princípio das Forças Virtuais (PFV).

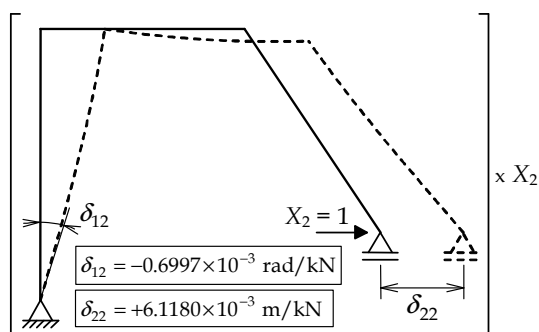
Caso (1) – Hiperestático  $X_1$  isolado no SP



A figura anterior mostra a configuração deformada (com fator de amplificação igual a 2000) do SP no caso (1). O hiperestático  $X_1$  é colocado em evidência, já que ele é uma incógnita do problema. Considera-se um valor unitário para  $X_1$ , sendo o efeito de  $X_1 = 1$  multiplicado pelo valor final que  $X_1$  deverá ter. A rotação  $\delta_{11}$  e o deslocamento horizontal  $\delta_{21}$  provocados por  $X_1 = 1$ , nas direções dos vínculos eliminados para a criação do Sistema Principal, são chamados de *coeficientes de flexibilidade*. Por definição as unidades dos coeficientes de flexibilidade correspondem às unidades de deslocamento ou rotação divididas pela unidade do hiperestático em questão.

Os valores dos coeficientes de flexibilidade do caso (1) estão indicados na figura anterior. O sinal da rotação  $\delta_{11}$  é positivo pois tem o mesmo sentido do que foi arbitrado para  $X_1 = 1$  e o sinal do deslocamento horizontal  $\delta_{21}$  é negativo pois tem o sentido contrário ao que foi arbitrado para  $X_2 = 1$  no caso (2) a seguir. Observe que o sinal dos termos  $\delta_{ij}$ , sendo  $i$  o índice do hiperestático, sempre são positivos, pois são deslocamentos ou rotações nos próprios pontos de aplicação de forças ou momentos unitários aplicados.

#### Caso (2) – Hiperestático $X_2$ isolado no SP



A figura acima mostra a configuração deformada (com fator de amplificação igual a 400) do SP no caso (2). De maneira análoga ao caso (1), o hiperestático  $X_2$  é colocado em evidência, considerando-se um valor unitário multiplicado pelo seu valor final. A rotação  $\delta_{12}$  e o deslocamento horizontal  $\delta_{22}$  provocados por  $X_2 = 1$ , nas direções dos vínculos eliminados para a criação do SP, também são *coeficientes de flexibilidade*. As unidades destes coeficientes, por definição, são unidades de deslocamento ou rotação divididas pela unidade do hiperestático  $X_2$ .

Observe que o valor de  $\delta_{12}$  e  $\delta_{21}$  são iguais. Isto não é coincidência. Os coeficientes  $\delta_{ij}$  e  $\delta_{ji}$ , sendo  $i$  e  $j$  índices de hiperestáticos, sempre serão iguais. Isso pode ser demonstrado pelo PFV.

A partir dos resultados obtidos nos casos mostrados acima, pode-se utilizar a superposição dos casos para restabelecer as condições de compatibilidade violadas. Isto é feito a seguir.

Somatório das rotações do nó A:

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0$$

Somatório dos deslocamentos horizontais no nó B:

$$\delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0$$

Sistema de equações de compatibilidade:

$$-13.64 \times 10^{-3} + 0.1152 \times 10^{-3} \cdot X_1 - 0.6997 \times 10^{-3} \cdot X_2 = 0$$

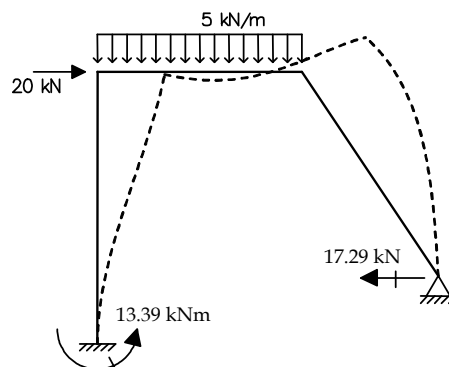
$$+115.2 \times 10^{-3} - 0.6997 \times 10^{-3} \cdot X_1 + 6.1180 \times 10^{-3} \cdot X_2 = 0$$

A solução deste sistema de equações de compatibilidade resulta nos seguintes valores das reações de apoio  $X_1$  e  $X_2$ :

$$X_1 = +13.39 \text{ kNm}$$

$$X_2 = -17.29 \text{ kN}$$

O sinal de  $X_1$  é positivo pois tem o mesmo sentido (anti-horário) do que foi arbitrado para  $X_1 = 1$  no caso (1) e o sinal de  $X_2$  é negativo pois tem o sentido contrário (da direita para a esquerda) ao que foi arbitrado para  $X_2 = 1$  no caso (2), tal como indica a figura abaixo.



Os valores encontrados para  $X_1$  e  $X_2$  fazem com que  $\theta_A = 0$  e  $\Delta_B^H = 0$ . Dessa forma, obteve-se a solução correta da estrutura porque, além de satisfazer as condições de equilíbrio – que sempre são satisfeitas nos casos (0), (1) e (2) –, o modelo estrutural satisfaz as condições de compatibilidade.

A solução da estrutura não termina na obtenção dos valores dos hiperestáticos  $X_1$  e  $X_2$ . Após isso, ainda é necessário obter os diagrama de esforços internos e os deslocamentos da estrutura. Existem duas alternativas para isso:

- Calcula-se uma estrutura isostática (o Sistema Principal) com o carregamento aplicado simultaneamente aos hiperestáticos – com os valores corretos encontrados – como se fossem forças e momentos aplicados.
- Utiliza-se a própria superposição de casos básicos para a obtenção dos esforços internos (ou deslocamentos) finais.

Embora a primeira opção possa parecer mais simples, a segunda opção é a que vai ser utilizada na maioria das soluções. O motivo para isso é que no cálculo dos valores dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade pelo PFV é necessário o conhecimento dos diagramas de esforços internos dos casos básicos (0), (1) e (2). Portanto, como os diagrama de esforços internos dos casos básicos já estarão disponíveis, os esforços internos finais da estrutura hiperestática original são obtidos por superposição dos esforços internos dos casos básicos. O mesmo se dá para obtenção dos deslocamentos.