

Princípios físicos básicos para as condições de equilíbrio

As condições de equilíbrio garantem o equilíbrio estático de qualquer porção isolada da estrutura ou da estrutura como um todo. Elas estão baseadas nas três leis de Newton:

1ª Lei de Newton (Princípio da Inércia): “Todo corpo permanece em seu estado de repouso ou de movimentos retilíneo uniforme até que uma ação externa, não equilibrada, atue sobre ele.”

2ª Lei de Newton: “A partir do momento em que o corpo ficar submetido à ação de uma força resultante F , o corpo irá adquirir uma aceleração a , de tal forma $F = ma$, sendo m a massa do corpo.”

3ª Lei de Newton: “A toda ação corresponde uma reação de mesma intensidade e de sentido contrário.”

Unidades de força

- 1 N (Newton) é a força cuja intensidade é capaz de deslocar uma massa de 1 kg com a aceleração de 1 m/seg^2 .
- 1 kN (kilo-Newton) = 1000 N.
- 1 kgf (quilograma-força) é a força cuja intensidade é capaz de deslocar uma massa de 1 kg com a aceleração da gravidade: $1 \text{ kgf} = \text{kg g}$.
Para conversão, será adotada a aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/seg}^2$.
 $1 \text{ kgf} = 10 \text{ N}$.
- 1 tf (tonelada-força) é a força cuja intensidade é capaz de deslocar uma massa de 1 tonelada (1000 kg) com a aceleração da gravidade: $1 \text{ tf} = 1000 \text{ kg g} = 1000 \text{ kgf}$
 $1 \text{ tf} = 10 \text{ kN}$.

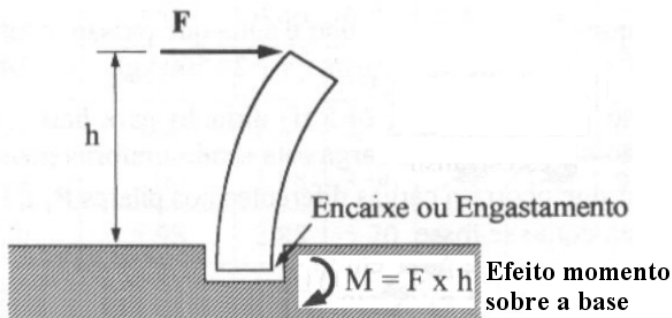
Discussão sobre as leis de Newton no contexto da análise de estruturas

- Estruturas civis estão sempre em estado de repouso (velocidade e aceleração nulas). Portanto, “a força resultante em uma estrutura deve ser nula.”
- Lembre-se que uma força é uma grandeza vetorial, com intensidade, direção e sentido. Para o caso de quadros planos, a imposição de resultante de força nula fornece duas condições para o equilíbrio global da estrutura:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \text{somatório de forças na direção horizontal deve ser nulo;}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \text{somatório de forças na direção vertical deve ser nulo.}$$

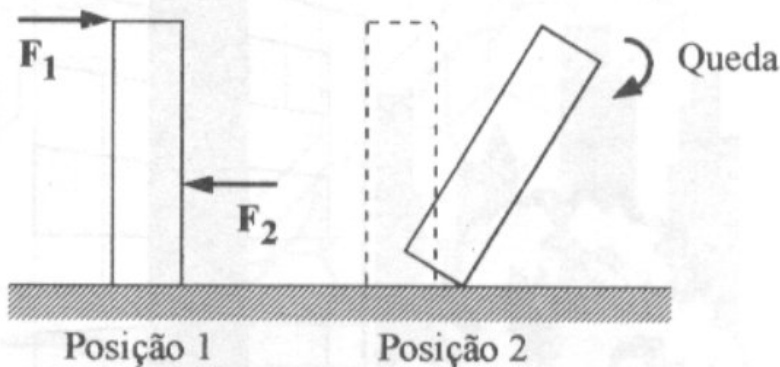
- Uma estrutura tem dimensões grandes e tem comportamento diferente de uma partícula sem dimensão. Além disso, as cargas atuam em uma estrutura em vários pontos de aplicação. Nesse caso, a ação à distância de uma força deve ser considerada. O efeito de uma força F atuando à distância h é chamado de *momento*: $M = F \times h$:



- Assim, a 2ª lei de Newton, para estruturas em repouso, pode ser estendida para momentos: “o momento resultante em uma estrutura deve ser nulo”. No caso de quadros planos, isso resulta em mais uma condição para o equilíbrio global da estrutura:

$\sum M_o = 0 \rightarrow \text{somatório de momentos em relação a um ponto qualquer deve ser nulo.}$

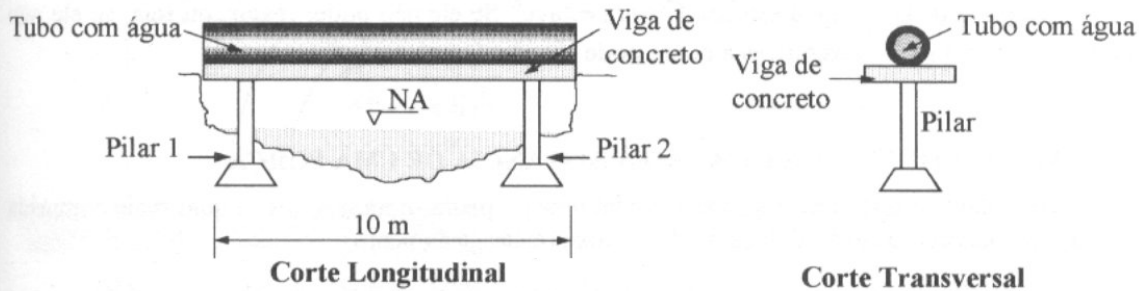
Essa condição de equilíbrio garante que o corpo não vai girar:



- Estruturas civis se deformam quando submetidas a solicitações (cargas, etc.). Mas as deformações e os deslocamentos de estruturas são muito pequenos, a ponto de serem desprezados quando são impostas condições de equilíbrio. Isto é, as condições de equilíbrio são impostas para a geometria original (indeformada) da estrutura. Esta hipótese é chamada de *hipótese de pequenos deslocamentos*.

- A 3ª lei de Newton (princípio de ação e reação) é aplicável a todas as estruturas recebendo cargas e que estejam em equilíbrio. Esse princípio vale para forças em qualquer direção e para momentos.

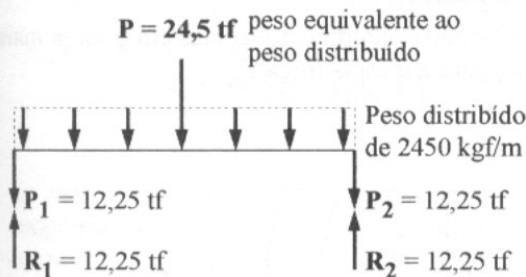
Imaginemos a ponte simplificada a seguir que vence o vão de um rio suportando uma canalização de água:



Admitimos que o conjunto viga, tubo e água que passam dentro dele pesam 2.450 kgf/m. O peso total disso é: $P = 2.450 \text{ kgf} / \text{m} \times 10 \text{ m} = 24.500 \text{ kgf} = 24,5 \text{ tf}$

Logo, o peso desse conjunto (24,5 tf) dirigido para baixo, deve ser suportado pelos dois pilares que receberão cargas iguais (a carga está sendo uniformemente distribuída não havendo pois razão para se pensar que ocorram cargas diferentes nos pilares P_1 e P_2).

Tudo se passa como se fosse:



O peso da estrutura (24,5 tf) foi descarregado nos dois pilares com forças P_1 e P_2 tal que:

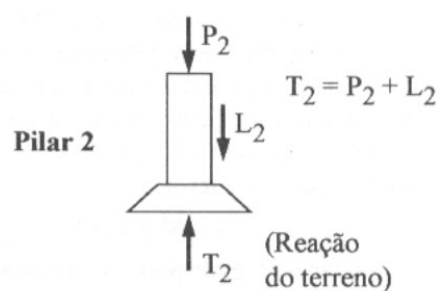
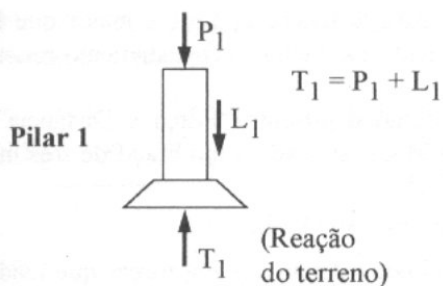
$$P_1 + P_2 = 24,5 \text{ tf.}$$

Os pilares reagem com as forças R_1 e R_2 que são iguais a P_1 e P_2 , logo:

$$R_1 = P_1 \Leftrightarrow R_1 = 12,25 \text{ tf}; R_2 = P_2 \Leftrightarrow R_2 = 12,25 \text{ tf}$$

Notar que R_1 é igual a P_1 mas em sentido contrário.

Pelo princípio de ação e reação, se o pilar reage na viga com R_1 (ascendente) sobre o pilar age um força P_1 inversa a R_1 .



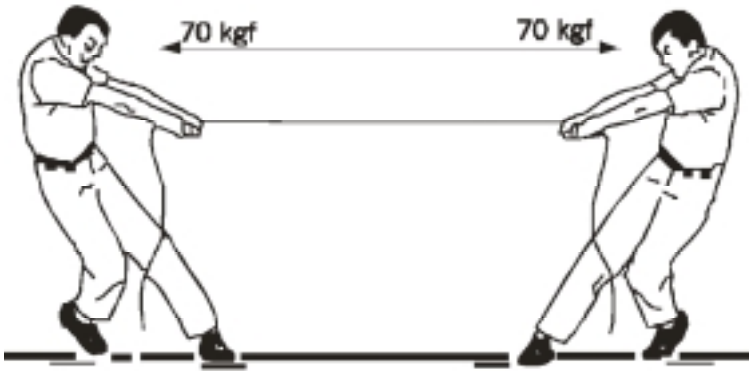
Para que os pilares fiquem estáveis, é necessário que o terreno aja sobre eles com forças T_1 e T_2 (ascendentes). T_1 não será igual a P_1 , pois deve receber também o peso próprio do pilar (L_1), igualmente T_2 será igual a $P_2 + L_2$.

No final da história, todo o peso do tubo, da água, da viga, e do pilar, tudo isso é transmitido ao terreno que tem que reagir com T_1 e T_2 . Se o terreno for forte, duro, rochoso, ele resiste (reage) com T_1 e T_2 e a estrutura estará estável. Se ele não puder reagir, ou seja, se ele não puder transmitir T_1 e T_2 aos pilares a ponte pode afundar (recalcar).

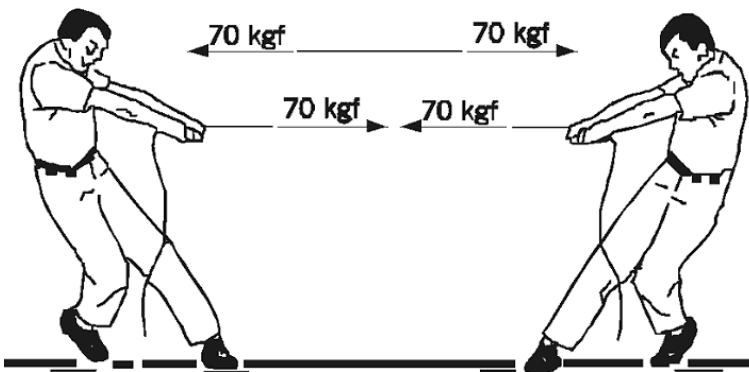
(Concreto Armado Eu te amo, pags. 13 e 14)

- As 2ª e 3ª leis de Newton também se aplicam para qualquer porção isolada da estrutura. Isto é, qualquer barra, qualquer nó ou qualquer trecho da estrutura tem que isoladamente satisfazer as condições de equilíbrio. Isso vai resultar no conceito de esforço interno. Veja, por exemplo, o esforço interno axial em um cabo:

Tração de um cabo



Esforço interno axial (esforço normal)



Mais adiante os esforços internos vão ser definidos para cada tipo de modelo estrutural: quadro plano, treliças, grelhas e quadros espaciais.

Vínculos externos (restrições de apoio)

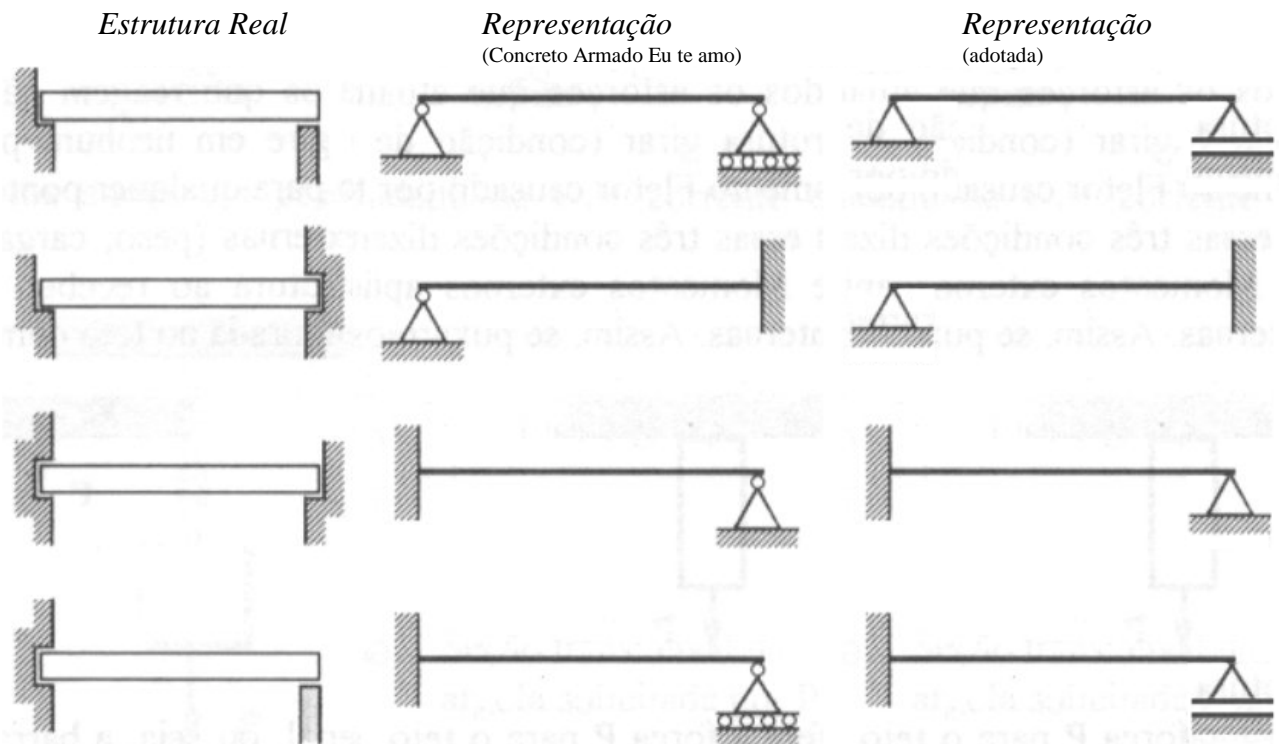
Em um modelo estrutural, as ligações com o meio externo têm que ser especificadas. Isso é feito através de *restrições de apoios*, também denominadas *vínculos externos*. Em um quadro plano, um apoio pode restringir o deslocamento horizontal Δ^x , o deslocamento vertical Δ^y , ou a rotação θ^z no ponto da estrutura onde está posicionado. Lembre-se que:

Δ^x → deslocamento na direção do eixo global X;

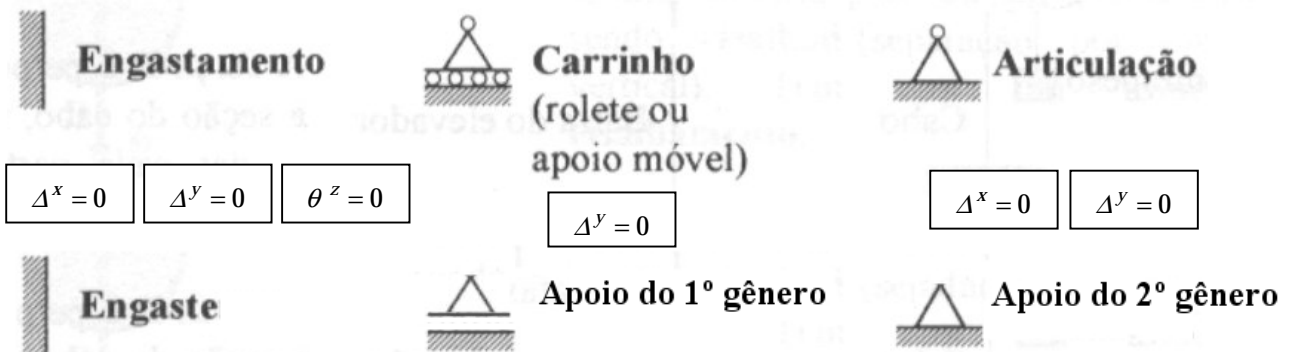
Δ^y → deslocamento na direção do eixo global Y;

θ^z → rotação em torno do eixo global Z.

Além disso, um apoio pode impedir cada componente de deslocamento ou rotação em separado, aos pares, ou todos juntos. Os tipos mais comuns de apoios estão indicados abaixo, onde também estão indicadas as suas representações no modelo estrutural.



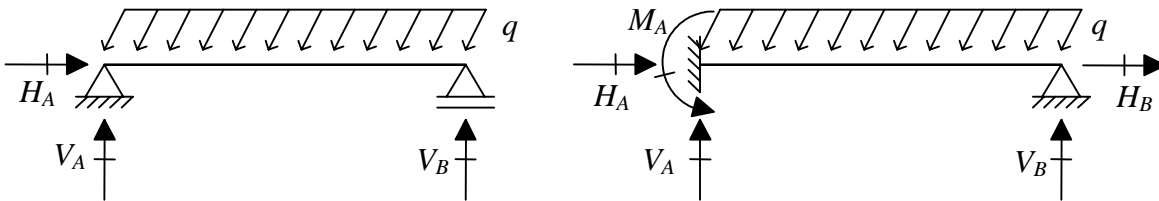
SIMBOLOGIA E RESTRIÇÕES IMPOSTAS



Reações de apoio

Cada restrição de apoio está associada a uma *reação de apoio*, que é a força ou momento que o vínculo externo exerce sobre a estrutura. O impedimento a um deslocamento está associado ao aparecimento de uma reação força. O impedimento de uma rotação está associado ao aparecimento de uma reação momento.

Dessa forma, um apoio do 1º gênero está associado a uma reação força vertical. Um apoio do 2º gênero está associado a uma reação força horizontal e uma reação força vertical. Um engaste está associado a três reações de apoio: uma reação força horizontal, uma reação força vertical e uma reação momento:



Aplicação das condições de equilíbrio para determinação de reações de apoio

Conforme dito anteriormente, um dos objetivos da Análise Estrutural é a determinação das reações de apoio de uma estrutura. De uma maneira geral, para se calcular as reações de apoio é necessário considerar todas as condições matemáticas que o modelo estrutural tem que atender: condições de equilíbrio, leis constitutivas dos materiais e condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações.

Entretanto, existe um caso especial de estruturas para as quais é possível determinar as reações de apoio (e também os esforços internos) utilizando apenas condições de equilíbrio. Esses tipos de estruturas são denominados *estruturas isostáticas*. O caso mais geral de estruturas é o de *estruturas hiperestáticas*, para as quais só é possível determinar reações de apoio utilizando todas as condições do modelo: equilíbrio, leis constitutivas e compatibilidade.

A análise de estruturas hiperestáticas é bem mais complexa do que a análise de estruturas isostáticas. Nesta seção, a determinação de reações de apoio é considerada apenas para estruturas isostáticas.

Os exemplos estudados são de vigas horizontais e barras verticais ou inclinadas, que se enquadram como modelos de quadros planos. Para esses tipos de modelos estruturais, existem três equações de equilíbrio disponíveis:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \text{somatório de forças na direção horizontal deve ser nulo;}$$

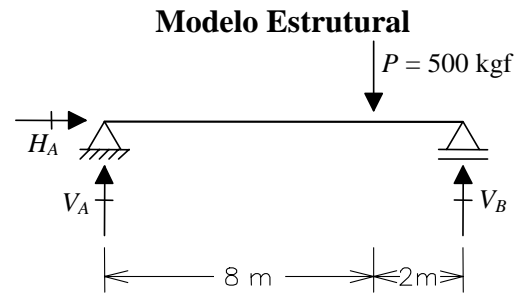
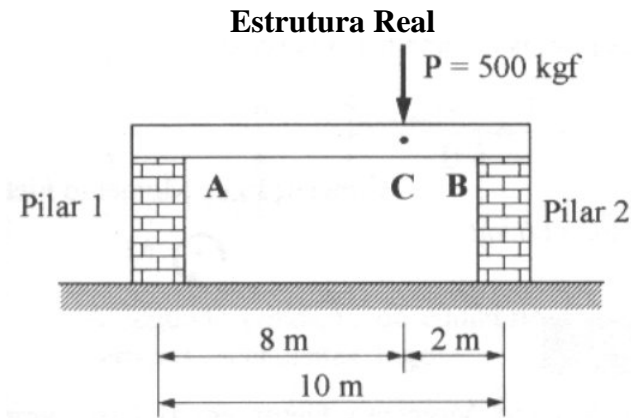
$$\sum F_y = 0 \rightarrow \text{somatório de forças na direção vertical deve ser nulo;}$$

$$\sum M_o = 0 \rightarrow \text{somatório de momentos em relação a um ponto qualquer deve ser nulo.}$$

Portanto, a condição para que quadros planos sejam isostáticos é que tenham apenas três reações de apoio.

Deve-se salientar que a presença de articulações internas (rótulas) acarreta equações de equilíbrio adicionais (isso será visto mais tarde). Portanto, um quadro plano isostático pode ter mais do que três reações de apoio quando tiver rótulas.

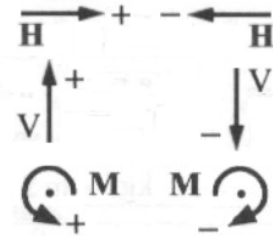
Exemplo 1



Imposição de somatório nulo de forças na direção horizontal:
 $\sum F_x = 0 \Rightarrow$ Reação força horizontal no apoio A é nula: $H_A = 0$

Convenção de sinais para forças e momentos:

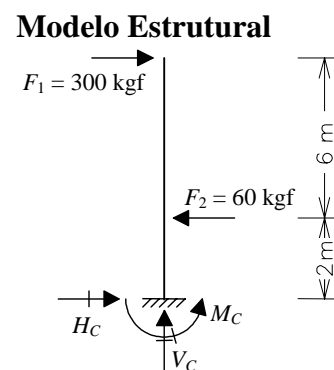
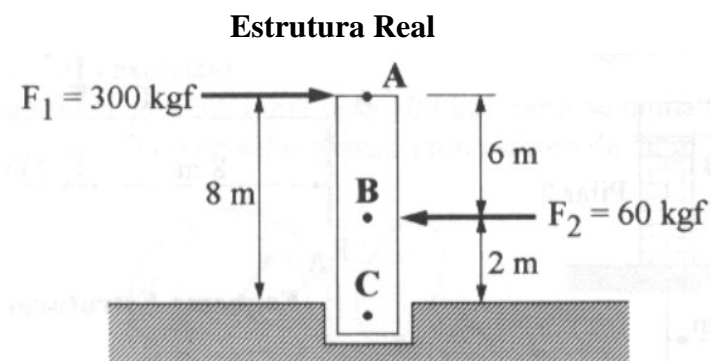
Imposição de somatório nulo de forças na direção vertical:
 $\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - P = 0. \therefore V_A + V_B = + 500 \text{ kgf}$



Imposição de somatório nulo de momentos no ponto A:
 $\sum M_A = 0 \Rightarrow V_A \times 0 - P \times 8 \text{ m} + V_B \times 10 \text{ m} = 0$
 $\Rightarrow V_B \times 10 \text{ m} = 500 \text{ kgf} \times 8 \text{ m} = 4000 \text{ kgf} \cdot \text{m}$
 $\therefore V_B = 4000 \text{ kgf} \cdot \text{m} \div 10 \text{ m} = + 400 \text{ kgf}$

$V_A + V_B = 500 \text{ kgf} \Rightarrow V_A = 500 \text{ kgf} - V_B$
 $\therefore V_A = 500 \text{ kgf} - 400 \text{ kgf} = + 100 \text{ kgf}$

Exemplo 2



Imposição de somatório nulo de forças na direção horizontal:

$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 - F_2 + H_C = 0 \Rightarrow H_C + 300 \text{ kgf} - 60 \text{ kgf} = 0$
 $\therefore H_C = - 300 \text{ kgf} + 60 \text{ kgf} = - 240 \text{ kgf}$ (com sentido contrário ao que está indicado na figura)

Imposição de somatório nulo de forças na direção vertical:

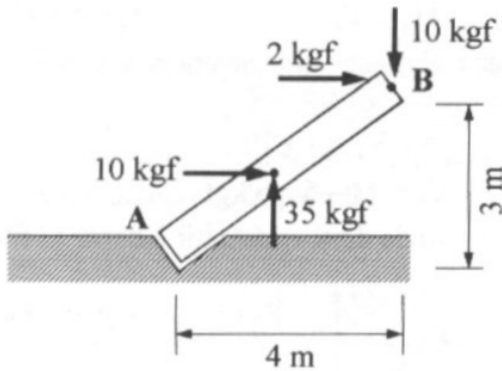
$\sum F_y = 0 \Rightarrow$ Reação força vertical no apoio C é nula: $V_C = 0$

Imposição de somatório nulo de momentos no ponto C:

$\sum M_C = 0 \Rightarrow - F_1 \times 8 \text{ m} + F_2 \times 2 \text{ m} + M_C = 0 \therefore M_C = + 300 \text{ kgf} \times 8 \text{ m} - 60 \text{ kgf} \times 2 \text{ m} = + 2280 \text{ kgf} \cdot \text{m}$

Exemplo 3

Calcular os esforços na barra abaixo. Adotar peso próprio de 1 kgf por metro centrado no meio.

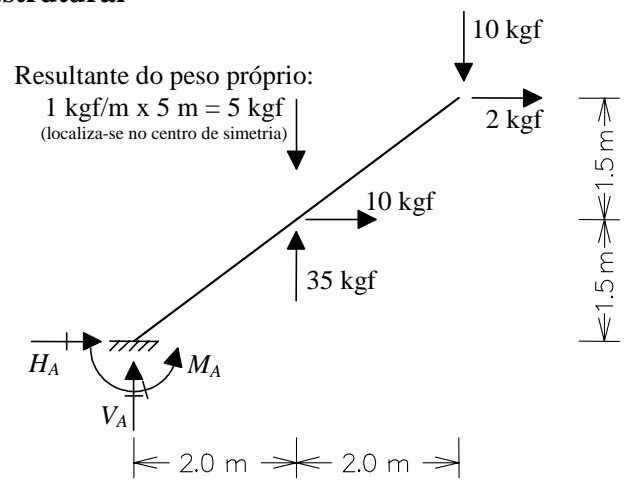
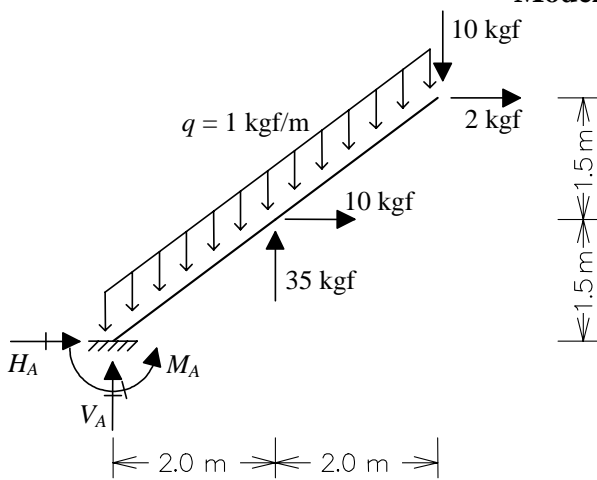


O comprimento da viga AB é

$$L = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}$$

(Teorema de Pitágoras)

Modelo Estrutural



Imposição de somatório nulo de forças na direção horizontal:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A + 10 \text{ kgf} + 2 \text{ kgf} = 0 \quad \therefore H_A = -12 \text{ kgf} \text{ (com sentido contrário ao que está indicado na figura)}$$

Imposição de somatório nulo de forças na direção vertical:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + 35 \text{ kgf} - 5 \text{ kgf} - 10 \text{ kgf} = 0. \quad \therefore V_A = -20 \text{ kgf} \text{ (com sentido contrário ao que está indicado)}$$

Imposição de somatório nulo de momentos no ponto A:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 \Rightarrow & M_A + V_A \times 0 + H_A \times 0 + 35 \text{ kgf} \times 2 \text{ m} - 5 \text{ kgf} \times 2 \text{ m} \\ & - 10 \text{ kgf} \times 1.5 \text{ m} - 10 \text{ kgf} \times 4 \text{ m} - 2 \text{ kgf} \times 3 \text{ m} = 0 \quad \therefore M_A = +1 \text{ kgf}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Exercícios propostos para cálculo de reações de apoio

