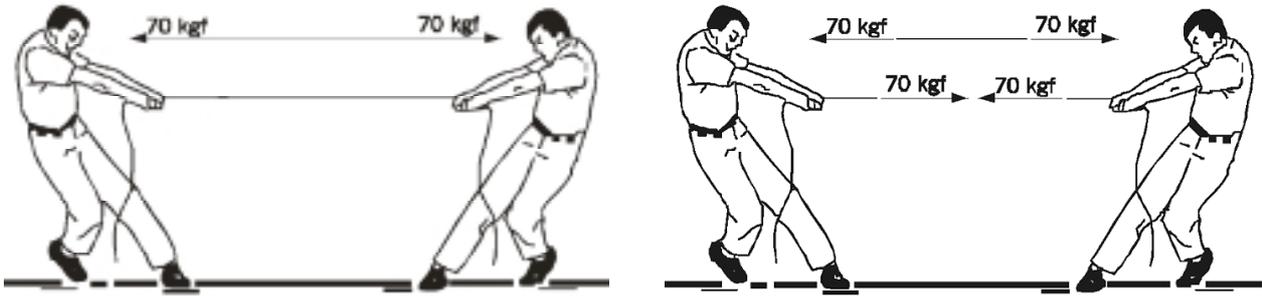


Esforços internos

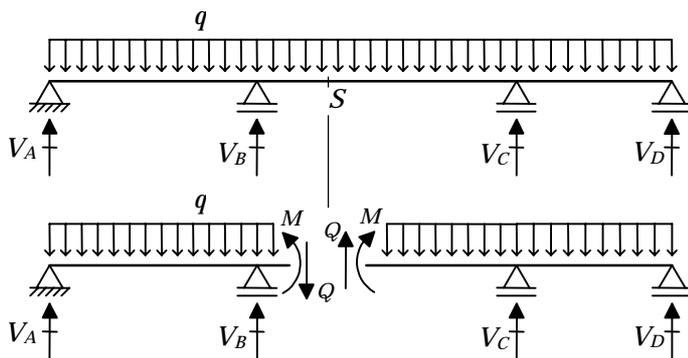


Esforços internos em uma estrutura caracterizam as ligações internas de tensões, isto é, esforços internos são integrais de tensões ao longo de uma seção transversal de uma barra.

Esforços internos representam o efeito de forças e momentos entre duas porções de uma estrutura reticulada resultantes de um corte em uma seção transversal.

Os esforços internos correspondentes de cada lado da seção seccionada são iguais e contrários, pois correspondem uma ação e a reação correspondente.

Esforços internos em vigas com cargas transversais



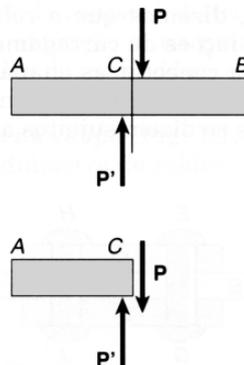
Esforço Cortante (Q):

É a resultante de forças de uma porção isolada sobre a outra porção na direção transversal ao eixo da barra na seção transversal de corte.

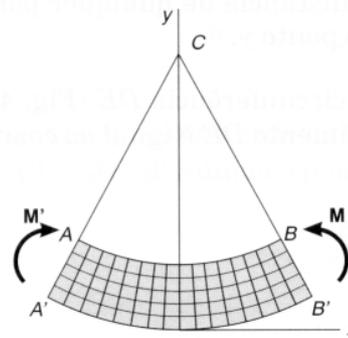
Momento Fletor (M):

É a resultante momento de todas as forças e momentos de uma porção isolada sobre a outra porção na direção transversal ao eixo da barra na seção transversal de corte.

O esforço cortante representa o efeito de força cisalhante em uma seção transversal de uma barra.



O momento fletor representa o efeito de flexão (ou dobramento) em uma seção transversal de uma barra.



Convenções de sinais para esforços internos de vigas

Esforços cortantes

Esforços cortantes são positivos quando, entrando com as forças à esquerda de uma seção transversal, a resultante das forças na direção transversal for no sentido para cima. De forma consistente (ação e reação), esforços cortantes são positivos quando, entrando com as forças à direita de uma seção transversal, a resultante das forças na direção transversal for no sentido para baixo.



Quando for contrário ao indicado, o esforço cortante é negativo.

Momentos fletores

Momentos fletores são positivos quando, entrando com as forças e momentos à esquerda de uma seção transversal, a resultante momento na seção for no sentido horário. De forma consistente (ação e reação), momentos fletores são positivos quando, entrando com as forças e momentos à direita de uma seção transversal, a resultante momento na seção for no sentido anti-horário.



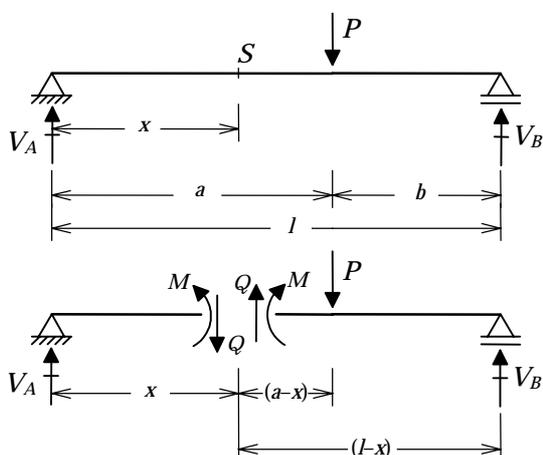
Quando for contrário ao indicado, o momento fletor é negativo.

Viga biapoiada com uma carga concentrada

Duas situações:

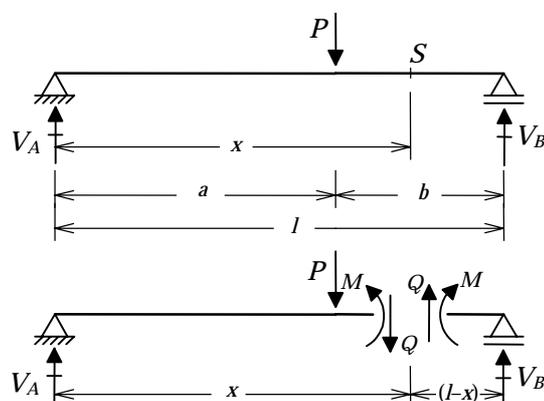
(1)

Seção S à esquerda da carga concentrada ($x < a$)



(2)

Seção S à direita da carga concentrada ($x > a$)



Reações de apoio

Determinadas pelo equilíbrio global da viga: $\sum F_y = 0$ e $\sum M_A = 0$:

$$V_A = P \frac{b}{l} \quad V_B = P \frac{a}{l}$$

Esforço cortante e momento fletor em uma transversal S

Determinados pelo equilíbrio de cada porção isolada da viga quando é dado um corte em S.

Na situação (1) – ($x < a$) –, o equilíbrio ($\sum F_y = 0$ e $\sum M_S = 0$) da porção à esquerda da seção S fornece:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Q = +V_A = +P \frac{b}{l} \quad \sum M_S = 0 \Rightarrow M = +V_A \cdot x = +P \frac{b \cdot x}{l}$$

Observe que o mesmo resultado tem que ser obtido se Q e M forem calculados através do equilíbrio da porção à direita de S:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Q = +P - V_B = +P - P \frac{a}{l} = +P \left(1 - \frac{a}{l}\right) = +P \frac{b}{l}$$

$$\sum M_S = 0 \Rightarrow M = -P \cdot (a - x) + V_B \cdot (l - x) = -P \cdot (a - x) + P \frac{a}{l} \cdot (l - x) = +P \left(x - a + a - \frac{a \cdot x}{l}\right) = +P \left(1 - \frac{a}{l}\right) \cdot x = +P \frac{b \cdot x}{l}$$

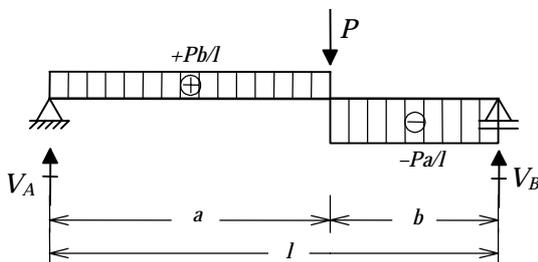
O cálculo feito pelo equilíbrio da porção da direita, apesar de ser mais complicado, foi feito para demonstrar que, *uma vez calculadas as reações de apoio de forma correta*, tanto faz entrar pela esquerda ou pela direita de uma seção transversal para se determinar os esforços internos. Em geral procura-se determinar os valores dos esforços internos pelo lado que for mais simples.

Para a situação (2) – ($x < a$) –, é mais fácil entrar pelas forças que estão à direita da seção S:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Q = -V_B = -P \frac{a}{l} \quad \sum M_S = 0 \Rightarrow M = +V_B \cdot (l - x) = +P \frac{a \cdot (l - x)}{l}$$

Diagrama de esforços cortantes

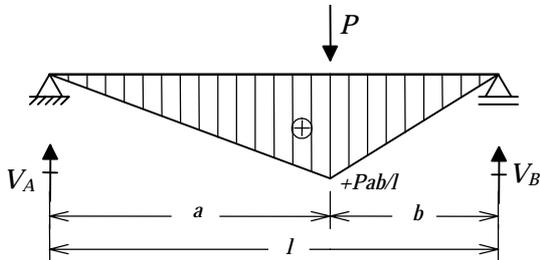
O diagrama de esforços cortantes é um gráfico que descreve a variação dos esforços cortantes ao longo das seções transversais da estrutura. A convenção adotada para o desenho do diagrama é tal que valores positivos de esforços cortantes são desenhados do lado das fibras superiores da barra e negativos do outro lado. No caso da viga biapoiada com carga concentrada, o diagrama é determinado para as duas situações (1) e (2) mostradas acima, resultando em uma descontinuidade no ponto de aplicação da carga:



Observe que o valor da descontinuidade do diagrama corresponde ao valor da carga concentrada P aplicada.

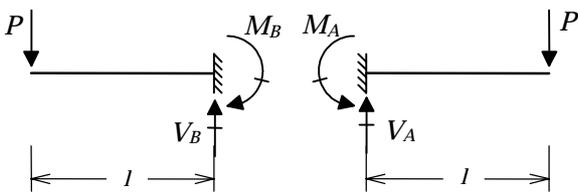
Diagrama de momentos fletores

O diagrama de momentos fletores é um gráfico que descreve a variação dos momentos fletores ao longo das seções transversais da estrutura. A convenção adotada para o desenho do diagrama é tal que valores positivos de momentos fletores são desenhados do lado das fibras inferiores da barra e negativos do outro lado. No caso da viga biapoiada com carga concentrada, o diagrama é determinado para as duas situações (1) e (2) mostradas acima:



Observe que o diagrama é contínuo, isto é, os resultados obtidos das situações (1) e (2) coincidem na seção do ponto de aplicação da carga concentrada P . Observe também que o diagrama tem um “bico” no ponto de aplicação de P , sendo que o valor máximo de momento fletor ocorre para esta seção: $M_{máx} = +Pab/l$.

Viga engastada e em balanço com uma carga concentrada



O equilíbrio das duas vigas em balanço resulta em:

$V_B = V_A = P$ e $M_B = M_A = P \cdot l$ (valores absolutos, sendo que os sentidos físicos estão indicados)

Diagrama de esforços cortantes

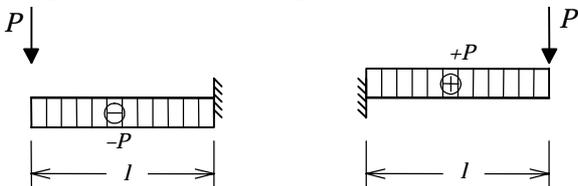
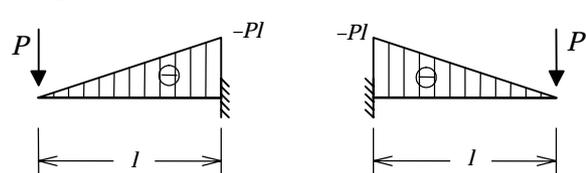
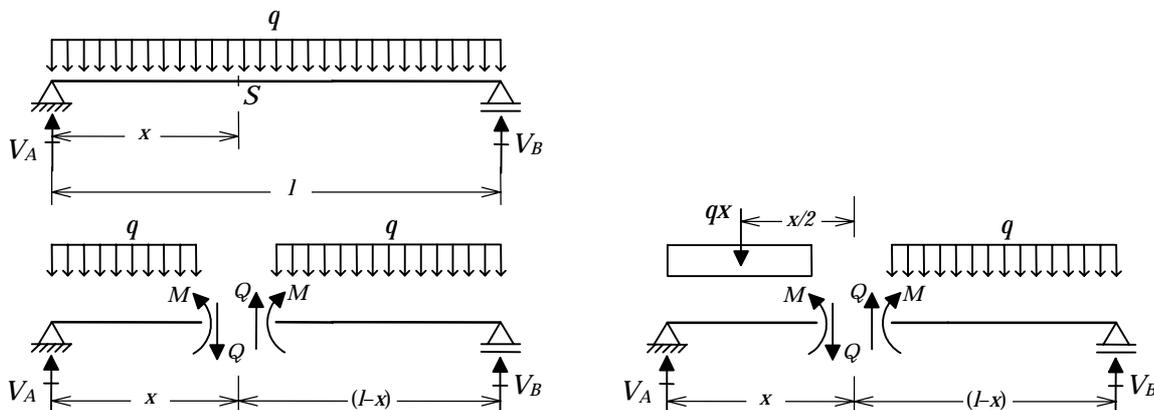


Diagrama de momentos fletores



Viga biapoiada com uma carga uniformemente distribuída



Reações de apoio

$$\sum F_y = 0 \text{ e } \sum M_A = 0 \text{ (global)} \Rightarrow V_A = V_B = \frac{q \cdot l}{2}$$

Esforço cortante e momento fletor em uma transversal S

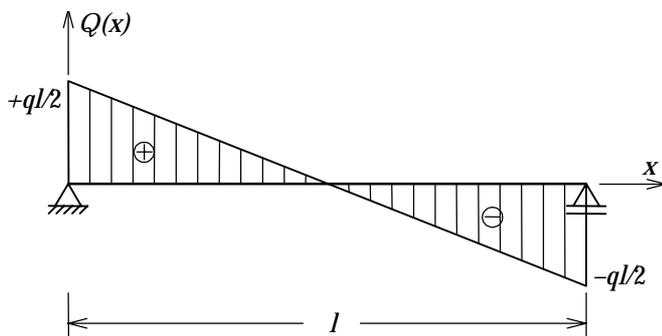
Determinados pelo equilíbrio de cada porção isolada da viga quando é dado um corte em S.

$\sum F_y = 0$ e $\sum M_S = 0$ da porção à esquerda da seção S fornece:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +V_A - q \cdot x - Q = 0 \Rightarrow Q = +V_A - q \cdot x \quad \therefore \boxed{Q = +\frac{q \cdot l}{2} - q \cdot x}$$

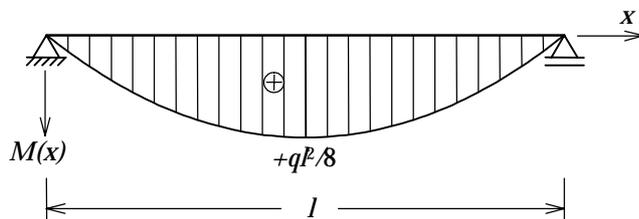
$$\sum M_S = 0 \Rightarrow -V_A \cdot x + q \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M = 0 \Rightarrow M = +V_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \quad \therefore \boxed{M = +\frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q}{2} \cdot x^2}$$

Diagrama de esforços cortantes



Observe que o diagrama de esforços cortantes é um gráfico que varia linearmente e que o coeficiente angular da reta é igual a $-q$ (igual a menos a taxa de carga de carregamento transversal distribuído aplicada de cima para baixo).

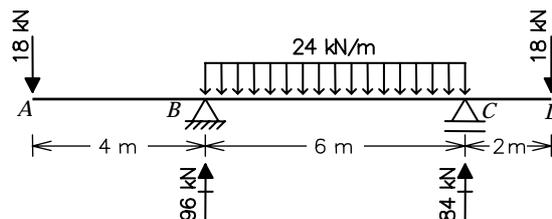
Diagrama de momentos fletores



Observe que o diagrama de momentos fletores é uma parábola do segundo grau e que o valor máximo do diagrama ocorre na seção central e é igual a $+ql^2/8$.

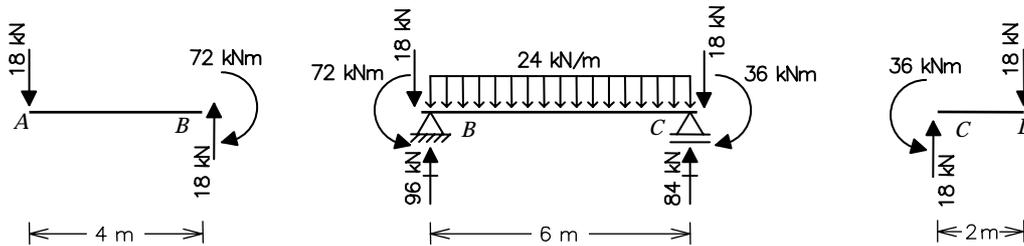
Viga biapoiada com balanços

Considere a viga biapoiada com balanços mostrada abaixo. Nas extremidades de cada balanço são aplicadas cargas concentradas e no vão central é aplicada uma carga uniformemente distribuída.



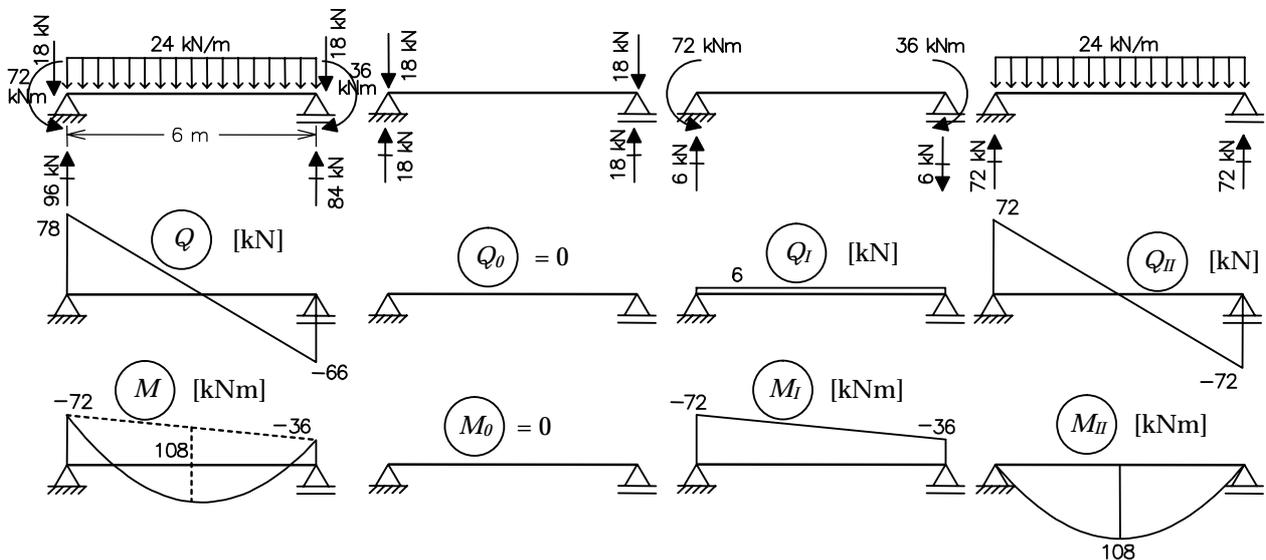
As reações de apoio da estrutura também estão indicadas na figura. Elas foram obtidas impondo-se $\sum F_y = 0$ e $\sum M_B = 0$ globalmente.

Os diagramas de esforços cortantes e momentos fletores na viga biapoiada com balanços são obtidos impondo-se o equilíbrio de porções isoladas da estrutura. Neste caso, é conveniente isolar os balanços e o vão central biapoiado:



O traçado dos diagramas nos balanços é feito da mesma maneira que foi feito para as vigas engastadas e em balanço mostradas anteriormente.

No vão central, o traçado dos diagramas pode ser explicado por superposição de efeitos:



O carregamento no vão central isolado é decomposto em três parcelas:

Parcela (0): Cargas concentradas atuando diretamente sobre os apoios.

Parcela (I): Momentos aplicados nas extremidades

Parcela (II): Carga uniformemente distribuída.

A figura acima mostra as reações de apoio provocadas por cada parcela de carregamento. Observe que a soma das reações em cada apoio resulta nas reações de apoio finais da estrutura.

Da mesma forma, os diagramas de esforços cortantes e momentos fletores são obtidos pela soma (superposição) dos diagramas obtidos de cada parcela de carregamento:

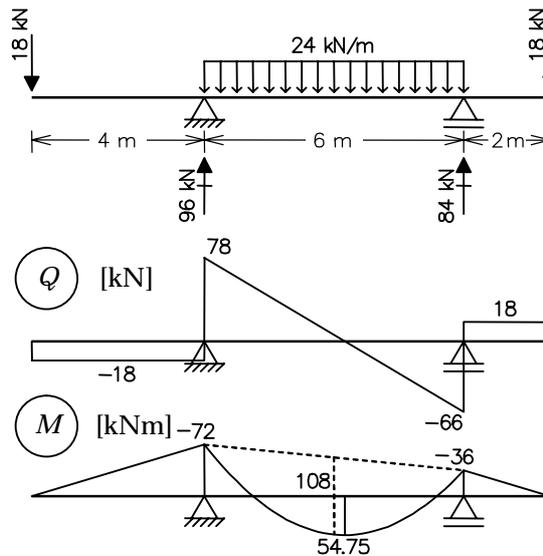
A parcela (0) tem diagramas nulos pois as cargas concentradas são aplicadas exatamente nos apoios e “morrem” nos próprios apoios.

Na parcela (I), como não existe carga distribuída na interior da viga, o esforço cortante em qualquer seção é igual ao valor da reação no apoio da esquerda (entrando pelas forças que estão à esquerda da seção). Portanto, o diagrama de esforços cortantes é constante.

O diagrama de momentos fletores da parcela (I) nas extremidades do vão são obtidos diretamente dos momentos fletores aplicados nas extremidades. Observa-se que o diagrama de momentos fletores desta parcela varia linearmente. Isso pode ser visto ao se calcular o momento fletor em uma seção qualquer dada por uma posição x em relação ao início do vão (entrando pelas forças à direita da seção): $M_I(x) = -72 + 6 \cdot x$.

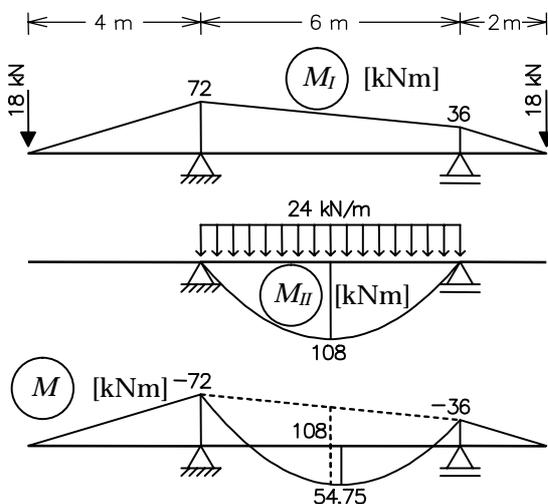
Finalmente, os diagramas da parcela (II) são os diagramas determinados anteriormente para uma viga biapoiada com carga uniformemente distribuída.

Os diagramas de esforços cortantes e momentos fletores para cada toda a viga biapoiada com balanços é mostrado abaixo:



Observa-se que o máximo valor para momento fletor não ocorre exatamente no meio do vão. Mais adiante vai ser mostrado que o máximo ocorre justamente na seção onde o esforço cortante é nulo.

A superposição de diagramas mostrada anteriormente para o vão central isolado também pode ser vista para a estrutura como um todo. Abaixo está mostrada a decomposição do carregamento da estrutura em duas parcelas: (I) cargas concentradas e (II) carga uniformemente distribuída. A superposição dos diagramas de momentos fletores de cada parcela resulta no diagrama de momentos fletores final da estrutura.



O procedimento de superposição de efeitos mostrado na figura é conhecido como *pendurar o diagrama de viga biapoiada para o carregamento que atua no interior da barra*. Dessa forma, o traçado do diagrama de momentos fletores em cada barra é feito em duas etapas:

Primeiro se determina os momentos fletores nas extremidades da barra. Se a barra não tiver cargas transversais no seu interior, o diagrama final é obtido simplesmente unindo os valores extremos por uma linha reta (é o que acontece nos balanços).

Em um segundo passo, se a barra tiver carregamento no seu interior, o diagrama de viga biapoiada para o carregamento é “pendurado” (superposto transversalmente) a partir da linha reta que une os valores extremos.