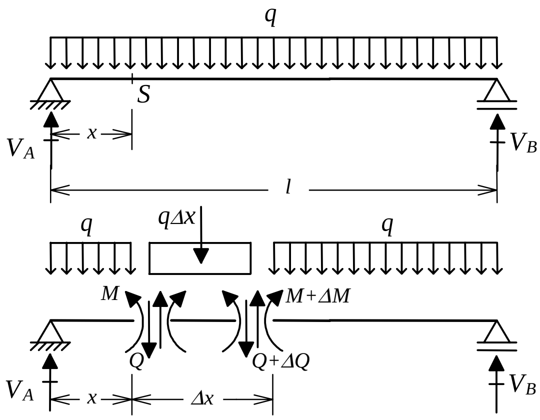
# Relações diferenciais de equilíbrio para vigas

Já foi visto que o equilíbrio de vigas pode ser imposto globalmente, o que resulta na determinação das reações de apoio (para vigas isostáticas), ou em porções isoladas, o que possibilita a determinação dos esforços internos (também para vigas isostáticas).

As condições de equilíbrio para vigas também podem ser impostas em pequenas porções isoladas, o que resulta em relações diferenciais de equilíbrio entre a taxa de carregamento transversal, o esforço cortante e o momento fletor.

Considere a viga biapoiada com carga uniformemente distribuída mostrada abaixo.




O objetivo desta análise é determinação das seguintes relações:

*Taxa de variação do esforço cortante* no trecho de comprimento $\Delta x$:

$$\boxed{\frac{\Delta Q}{\Delta x}}$$

*Taxa de variação do momento fletor* no trecho de comprimento $\Delta x$:

$$\boxed{\frac{\Delta M}{\Delta x}}$$

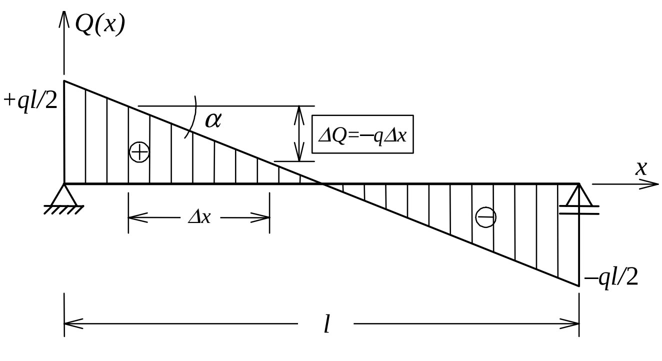
O equilíbrio da pequena porção de comprimento $\Delta x$ resulta em:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \quad +Q - q \cdot \Delta x - (Q + \Delta Q) = 0 \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\Delta Q}{\Delta x} = -q}$$

$$\sum M_S = 0 \Rightarrow \quad Q \cdot 0 - M - q \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2} + (M + \Delta M) - (Q + \Delta Q) \cdot \Delta x = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta M = \left( Q + \Delta Q + \frac{q \cdot \Delta x}{2} \right) \cdot \Delta x \Rightarrow \quad \frac{\Delta M}{\Delta x} = Q + \frac{\Delta Q}{\Delta x} \cdot \Delta x + \frac{q \cdot \Delta x}{2} \Rightarrow \quad \frac{\Delta M}{\Delta x} = Q - q \cdot \Delta x + \frac{q \cdot \Delta x}{2} \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\Delta M}{\Delta x} = Q - \frac{q \cdot \Delta x}{2}}$$

A relação $\Delta Q / \Delta x$ mostrada acima tem uma interpretação que é indicada no diagrama de esforços cortantes da viga:

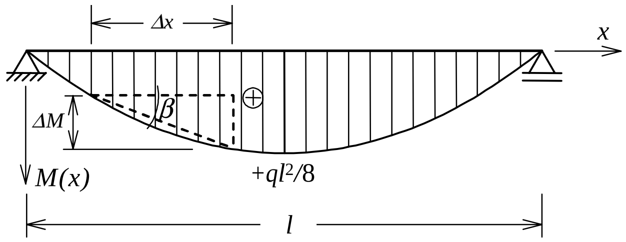



A inclinação da reta do diagrama, isto é, o coeficiente angular do diagrama de esforços cortantes é igual a $-q$ (igual a menos a taxa de carregamento transversal distribuído aplicado de cima para baixo):

$$\boxed{\frac{\Delta Q}{\Delta x} = -q \quad \Rightarrow \quad \tan \alpha = q}$$

A taxa variação do esforço cortante no trecho de comprimento $\Delta x$ é igual a $-q$.

A relação $\Delta M/\Delta x$ também tem uma interpretação que é indicada no diagrama de momentos fletores da viga:




A inclinação da reta que interpola os valores do diagrama de momentos fletores no trecho com comprimento $\Delta x$ é igual à taxa de variação do momento fletor no trecho:

$$\boxed{\frac{\Delta M}{\Delta x} = Q - \frac{q \cdot \Delta x}{2} = \tan \beta}$$

Agora imagine que o comprimento do trecho isolado $\Delta x$ tenha um valor tão pequeno quando se queira. Isto é, imagine no limite quando $\Delta x$ tender a zero. Nessa situação, as taxas de variação do esforço cortante e do momento fletor vão tender a valores pontuais das inclinações dos diagramas.

Matematicamente, os limites das taxas de variação de esforço cortante e momento fletor quando o comprimento do trecho tende a zero são representadas por:

$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x} = \frac{dQ}{dx}}$; sendo que $\boxed{\frac{dQ}{dx}}$ é chamada de *derivada do esforço cortante em relação a x*.

$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{dM}{dx}}$; sendo que $\boxed{\frac{dM}{dx}}$ é chamada de *derivada do momento fletor em relação a x*.

*A derivada de uma função qualquer representa a taxa de variação pontual da função.*

As expressões para as derivadas do esforço cortante e momento fletor são:

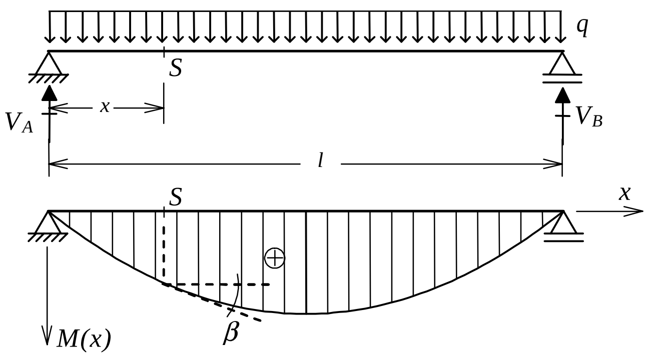
$\frac{dQ}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} -q = -q \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{dQ}{dx} = -q}$ (*derivada do esforço cortante é igual a –q*)

$\frac{dM}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left( Q - \frac{q \cdot \Delta x}{2} \right) = Q \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{dM}{dx} = Q(x)}$ (*derivada do momento fletor é igual a Q*)

Estas expressões são chamadas *relações diferenciais de equilíbrio de vigas*.

Observe que estas expressões são gerais, isto é, não são específicas para o caso da viga biapoiada com carga uniformemente distribuída. Isto porque, mesmo no caso de carga distribuída não constante, no limite quando $\Delta x$ tende a zero, a taxa de carregamento distribuído no trecho de comprimento $dx$ é constante e igual a $q(x)$, sendo $q(x)$ o valor da carga no ponto de avaliação.

A interpretação da derivada do momento fletor é mostrada abaixo:




A derivada do momento fletor é a inclinação da curva do diagrama de momentos fletores em qualquer ponto de avaliação, isto é a sua taxa de variação pontual (ou sua derivada) é igual a:

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = Q(x) = \tan \beta}$$

Pode-se combinar as relações diferenciais do esforço cortante de do momento fletor para obter uma *relação diferencial de segunda ordem* entre o momento fletor e a taxa de carregamento distribuído:

$$\frac{dQ}{dx} = -q \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}\left(\frac{dM}{dx}\right) = -q \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{d^2M}{dx^2} = -q}$$ (*derivada à segunda do momento fletor é igual a –q*)

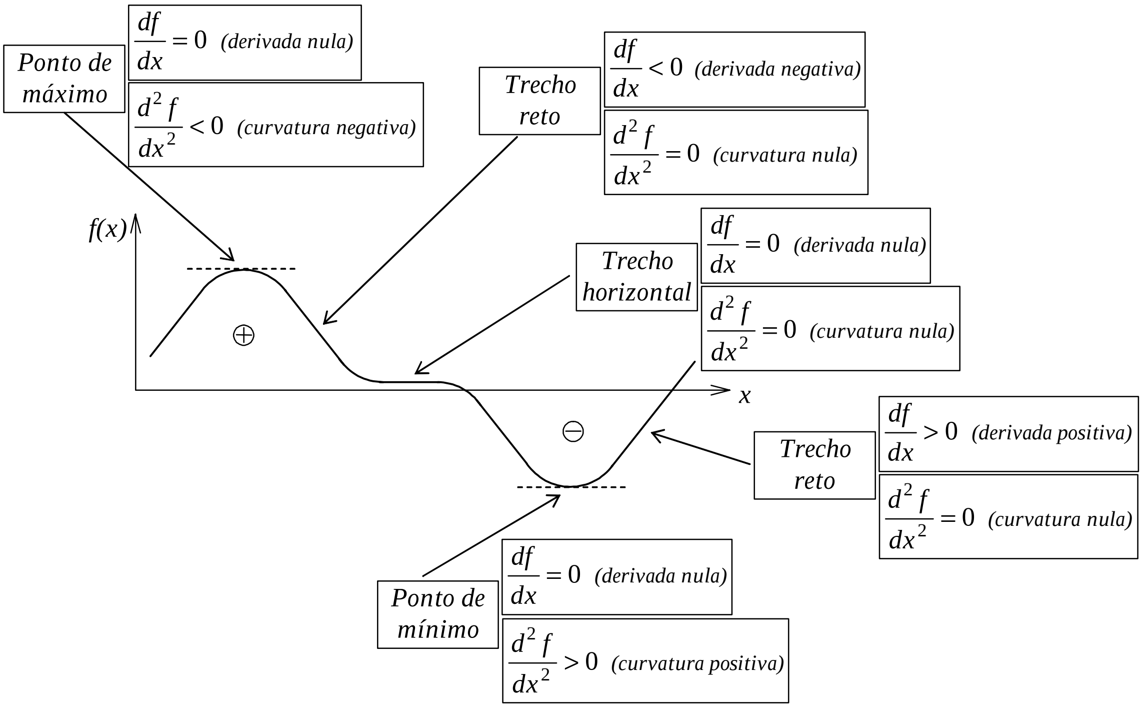
## Análise qualitativa dos aspectos dos diagramas de esforços internos

As relações diferenciais de equilíbrio de vigas são muito úteis para descrever os aspectos qualitativos dos diagramas de esforços cortantes e momentos fletores, tal como feito a seguir.

Duas importantes propriedades das derivadas de funções devem ser salientadas:

- *Nos pontos de máximos ou mínimos de uma função a sua derivada (taxa de variação pontual) é nula.*

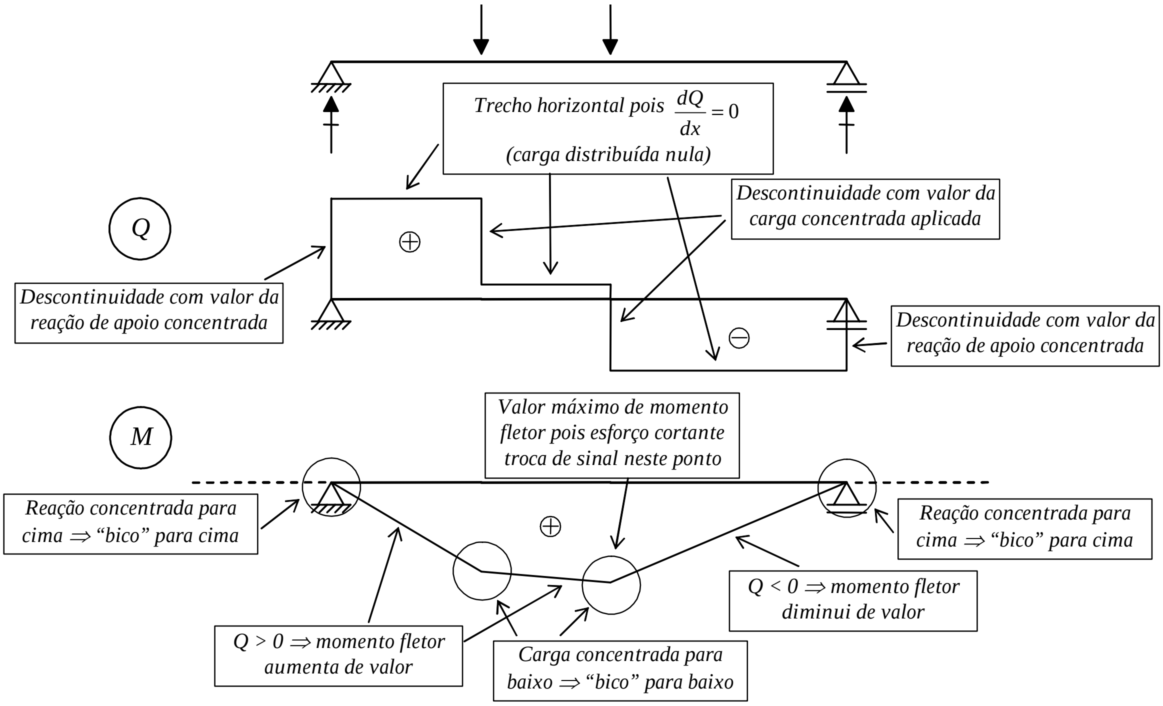
- *A derivada à segunda de uma função dá uma indicação de sua curvatura ou concavidade da função.*

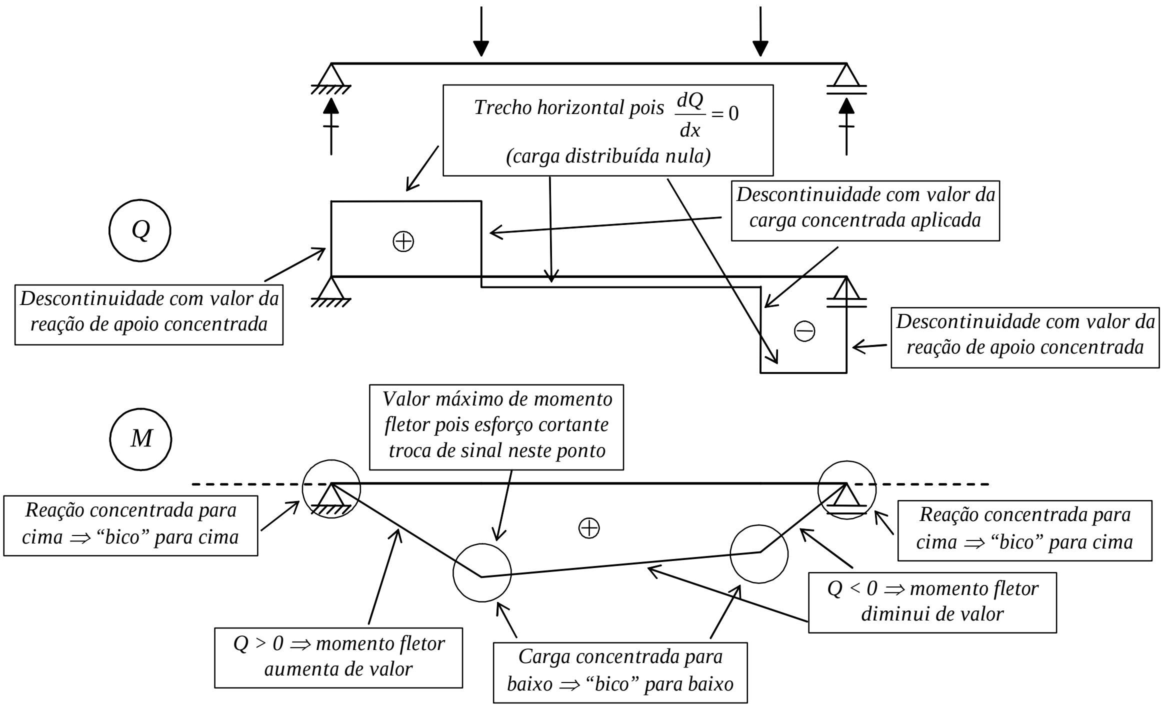



Com base nessas propriedades das derivadas, os diagramas de esforços cortantes e momentos fletores de algumas vigas serão analisados a seguir.

Deve ser observado que o diagrama de momentos fletores é desenhado com os valores positivos em baixo e os negativos em cima. Portanto, um trecho descendente do diagrama tem derivada positiva e um trecho ascendente tem derivada negativa. Consistentemente, um trecho com concavidade voltada para cima tem derivada à segunda negativa e um trecho com concavidade para baixo tem derivada à segunda positiva.

## Viga biapoiada com cargas concentradas



## Viga contínua com balanços e com carga uniformemente distribuída