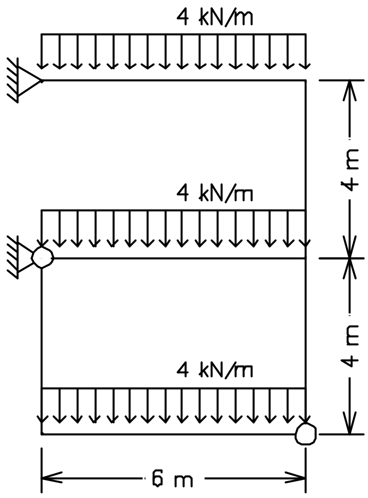
CIV 1127 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 2º Semestre – 2000

Primeira Prova – Data: 25/09/2000 – Duração: 2:30 hs – Sem Consulta

1ª Questão (6,0 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 1{,}0 \times 10^5\ kNm^2$.



2ª Questão (3,0 pontos)
Considere que a estrutura da questão anterior sofreu as seguintes solicitações (não considere o carregamento):

- Variação de temperatura da barra central: as fibras superiores sofrem um aquecimento de $\Delta T_S = +20^oC$ e as fibras inferiores sofrem um resfriamento de $\Delta T_i = -10^oC$.
- Apoio central sofreu um recalque vertical de *5 cm*, de cima para baixo.

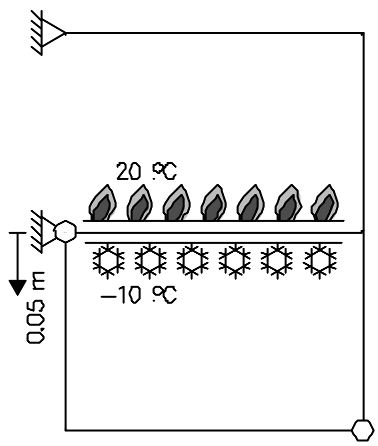
Determine o diagrama de momentos fletores no quadro devido a estas solicitações atuando simultaneamente, sabendo que:

- A altura da seção transversal das barras é $h = 0{,}50\ m$, e o centro de gravidade da seção transversal fica no meio da altura.
- O coeficiente de dilatação térmica das barras é $a = 1{,}0 \times 10^{-5}\ /^oC$.
- O deslocamento axial relativo entre duas seções distantes de *dx* provocada pela variação de temperatura é:

  $du = a\ \Delta T_{CG}\ dx,$

  onde ΔT_{CG} é a variação de temperatura no centro de gravidade da seção transversal.
- A rotação relativa entre duas seções distantes de *dx* provocada pela variação de temperatura é:

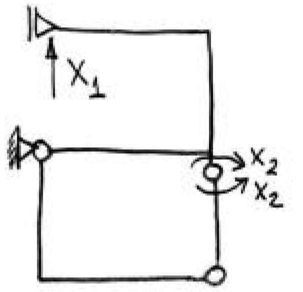
$$dq = a\,\frac{(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h}\,dx$$



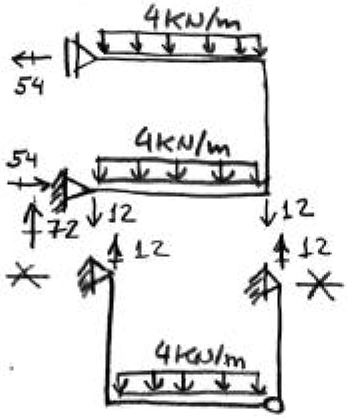
3ª Questão (1,0 ponto)
Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

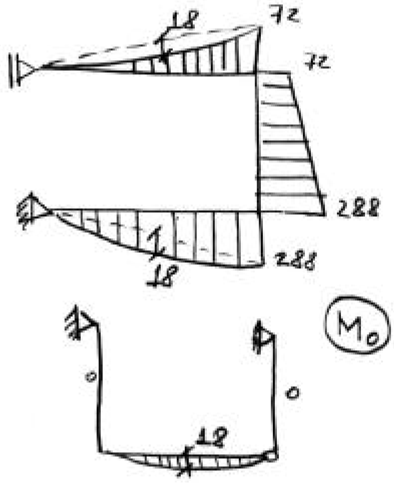
1ª Questão

Sistema Principal e Hiperestáticos

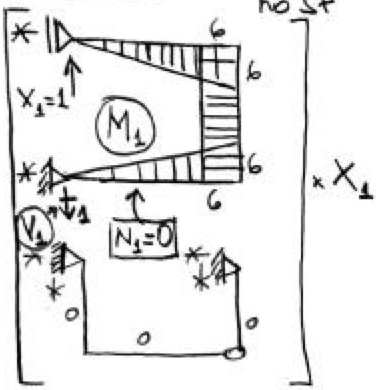


caso(0) - Solicitação externa isolada no SP

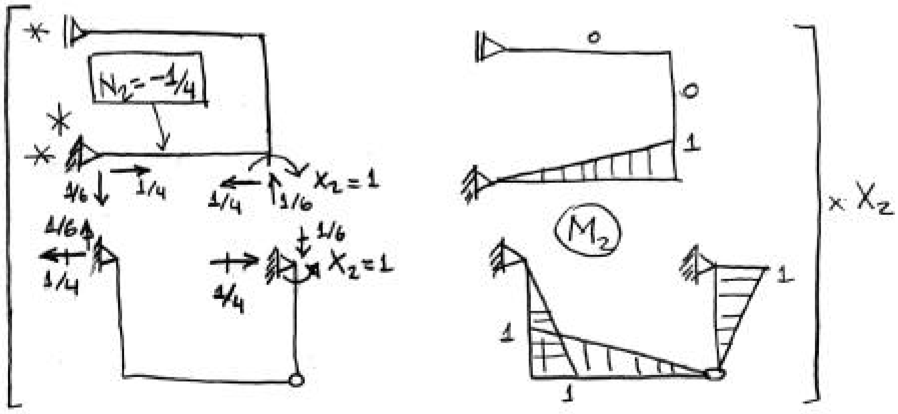




Caso(1) - X_1 isolado no SP



caso(2) - X_2 isolado no SP



Sistema de Equações de compatibilidade

$$\begin{cases}\delta_{10}+\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=0\\ \delta_{20}+\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=0\end{cases} \longrightarrow \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix}-8640\\-648\end{Bmatrix}+\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}288 & 12\\12 & \frac{20}{3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}X_1=28{,}05\,\text{KN}\\X_2=46{,}70\,\text{KNm}\end{cases}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\left[-\frac{1}{3}\times6\times72\times6+\frac{1}{3}\times6\times18\times6-\frac{1}{2}\times6\times72\times4-\frac{1}{2}\times6\times288\times4-\frac{1}{2}\times6\times288\times6-\frac{1}{3}\times6\times18\times6\right]=-\frac{8640}{EI}$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\left[-\frac{1}{3}\times1\times288\times6-\frac{1}{3}\times1\times18\times6-\frac{1}{3}\times1\times18\times6\right]=-\frac{648}{EI}$$

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\times6\times6\times6+6\times6\times4+\frac{1}{3}\times6\times6\times6\right]=\frac{288}{EI}$$

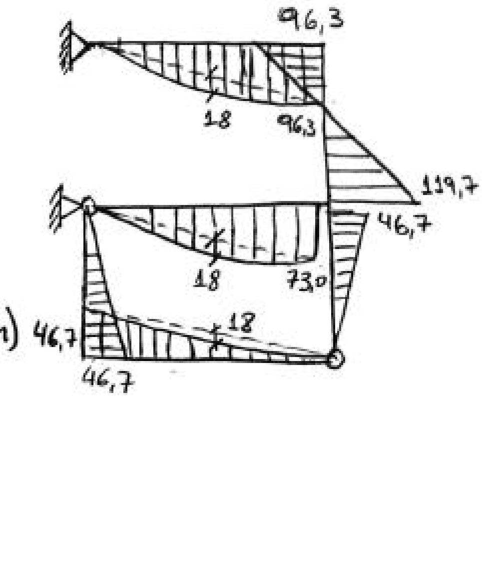
$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\left[+\frac{1}{3}\times6\times1\times6\right]=\frac{12}{EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\left[2\times\frac{1}{3}\times1\times1\times6+2\times\frac{1}{3}\times1\times1\times4\right]=\frac{20}{3\times EI}$$

Momentos Fletores Finais

$$M=M_0+M_1X_1+M_2X_2 \Longrightarrow$$

M (KNm)



2ª Questão

Variação de temperatura na barra central

$$d\theta^T = \frac{\alpha(-10^\circ - 20^\circ)}{0{,}50}\,dx = -60\alpha\,dx \qquad du^T = \alpha\,\Delta T_{CG}\,dx = \alpha\left(\frac{-10^\circ + 20^\circ}{2}\right)dx = +5\alpha\,dx$$

$$\delta_{10}^T = \int_0^6 M_1\,d\theta^T + \int_0^6 \underbrace{\cancel{N_1}}_{0}\,du^T \rightarrow \delta_{10}^T = -60\alpha\left[\int_0^6 M_1(x)\,dx\right] = -60\alpha\left[-\frac{1}{2}\times 6\times 6\right] = +1080\alpha$$

$$\delta_{20}^T = \int_0^6 M_2\,d\theta^T + \int_0^6 N_2\,du^T \rightarrow \delta_{20}^T = -60\alpha\left[\int_0^6 M_2(x)\,dx\right] + 5\alpha\left[\int_0^6 N_2(x)\,dx\right]$$

$$\delta_{20}^T = -60\alpha\left[-\frac{1}{2}\times 6\times 1\right] + 5\alpha\left[-\frac{1}{4}\times 6\right] = \frac{345}{2}\alpha$$

Recalque do apoio central

(no caso(0), como SP é isostático ⇒ movimento de corpo rígido)

$$\delta_{10}^\ell \times (1) + V_1 \times (\ell) = 0 \rightarrow \delta_{10}^\ell \times (1) + (-1)\times(-0{,}05) = 0 \Rightarrow \delta_{10}^\ell = -0{,}05\,m$$

$$\underbrace{\delta_{20}^\ell \times (1) + V_2 \times (\ell)}_{\overline{W}_E} = \underbrace{0}_{\overline{U}} \rightarrow \delta_{20}^\ell \times (1) + (0)\times(-0{,}05) = 0 \Rightarrow \delta_{20}^\ell = 0$$

(movimento de corpo rígido ⇒ Energia de deformação $\overline{U} = 0$)

Sistema de Equações de compatibilidade

$$\begin{cases}(\delta_{10}^T + \delta_{10}^\ell) + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ (\delta_{20}^T + \delta_{20}^\ell) + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0\end{cases} \rightarrow \begin{Bmatrix}1080\alpha - 0{,}05 \\ \frac{345}{2}\alpha\end{Bmatrix} + \frac{1}{EI}\begin{bmatrix}288 & 12 \\ 12 & \frac{20}{3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1 \\ X_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0 \\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}X_1 = 15{,}88\,KN \\ X_2 = -54{,}46\,KNm\end{cases}$$

Momentos Fletores Finais

$$M = \underbrace{M_0}_{=0} + M_1 X_1 + M_2 X_2 \Rightarrow$$

M (KNm)