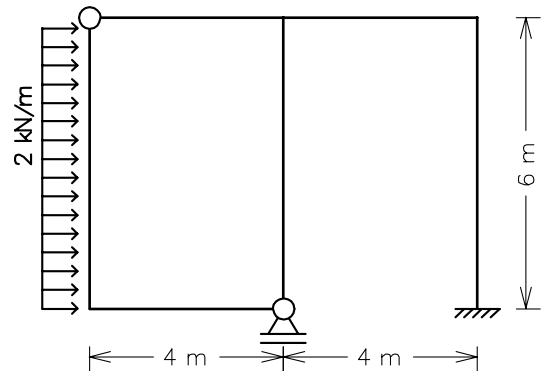


CIV 1127 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2001

Primeira Prova – Data: 18/04/2001 – Duração: 2:30 hs – Sem Consulta

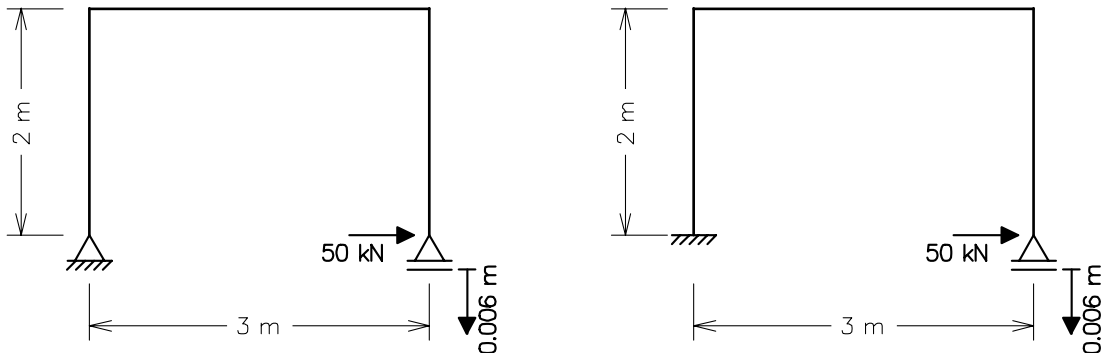
1ª Questão (5,5 pontos)

Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 1,0 \times 10^5 \text{ kNm}^2$.



2ª Questão (3,5 pontos)

Considere as duas estruturas mostradas abaixo. A da esquerda é um quadro isostático e a da direita é um quadro hiperestático. Os dois quadros sofrem a mesma solicitação: uma força horizontal de 50 kN aplicada no apoio da direita e um recalque desse mesmo apoio de 6 mm para baixo. Todas as barras têm um material com módulo de elasticidade $E = 1,0 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ e seções transversais com momento de inércia $I = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^4$. Considere válida a hipótese de pequenos deslocamentos.



Pede-se:

- (a) Determine o diagrama de momentos fletores da estrutura isostática.
- (b) Determine o diagrama de momentos fletores da estrutura hiperestática. Deve-se utilizar o Método das Forças, adotando OBRIGATORIAMENTE como Sistema Principal a estrutura isostática da esquerda. Somente considere deformações por flexão.
 - (b.1) Dê a interpretação física do termo de carga δ_{10} do sistema de equações de compatibilidade do Método das Forças para esta solução.
 - (b.2) Mostre a dedução do termo de carga δ_{10} pelo Princípio das Forças Virtuais.
- (c) Considere que as colunas dos quadros acima tiveram a seção transversal modificada para uma com momento de inércia $I = 2,0 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ (a viga não se altera). Responda sem fazer nenhum cálculo:
 - (c.1) O diagrama de momentos fletores da estrutura isostática se altera? Por que?
 - (c.2) O diagrama de momentos fletores da estrutura hiperestática se altera? Por que?

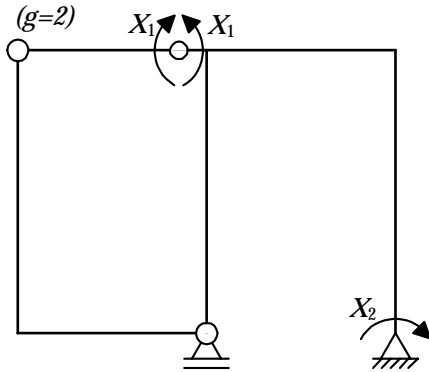
3ª Questão (1,0 ponto)

Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

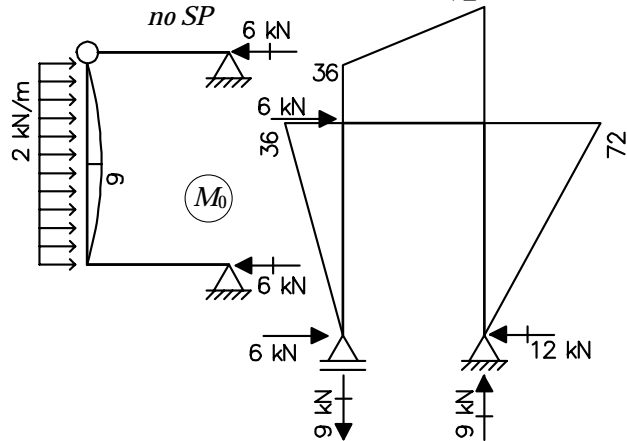
1ª Questão

Sistema Principal e Hiperestáticos

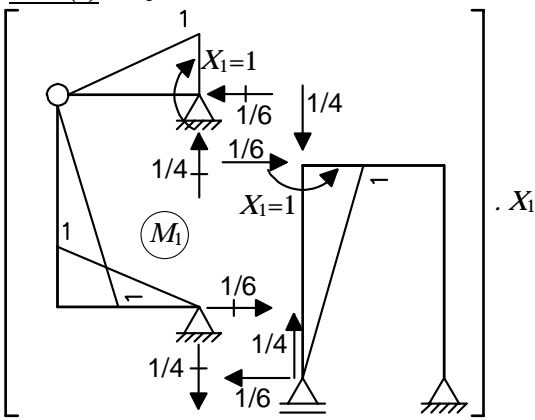
(g=2)



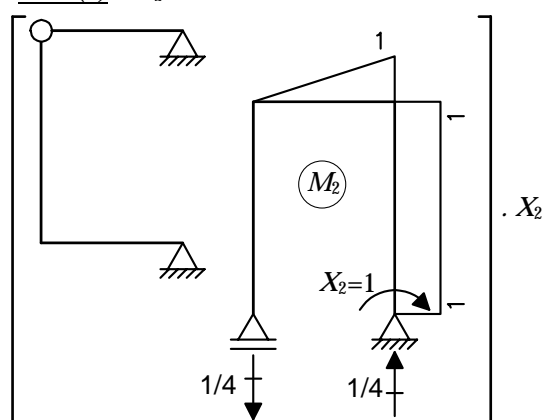
Caso (0) - Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) - X1 isolado no SP



Caso (2) - X2 isolado no SP



Equações de Compatibilidade

$$\begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} X_1 = +8.10 \text{ kNm} \\ X_2 = -45.82 \text{ kNm} \end{Bmatrix}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 9 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 36 \cdot 6 \right] = -\frac{54}{EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 72 \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 36 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 72 \cdot 6 \right] = +\frac{336}{EI}$$

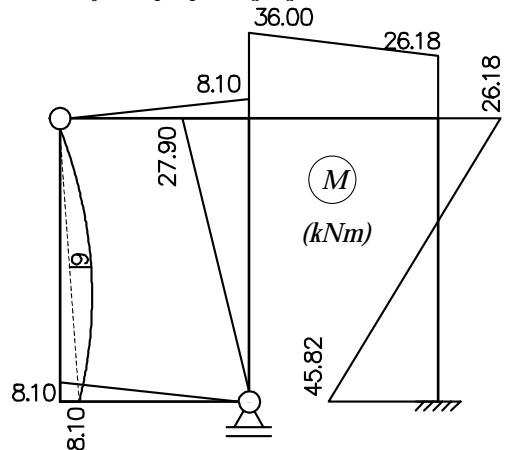
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \right] = +\frac{20}{3EI}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = 0$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 6 \right] = +\frac{22}{3EI}$$

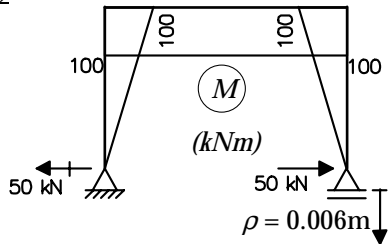
Diagrama de Momentos Fletores

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$$



2ª Questão

Item (a)



Como a estrutura é isostática, o “pequeno” recalque de apoio não provoca deformações (só movimento de corpo rígido). Portanto, o recalque não provoca momentos fletores, que só são devidos à carga de 50 kN aplicada.

Item (b.1): Equação de compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

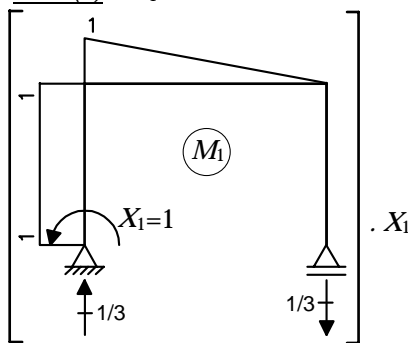
δ_{10} é a rotação da seção do apoio da esquerda no caso (0)

Item (b)

Caso (0) – Solicitação eterna isolada no SP

Idêntico ao item (a).

Caso (1) – X_1 isolado no SP



Item (b.2) – Cálculo de δ_{10} pelo Princípio das Forças Virtuais (PFV)

Sistema Real	Sistema Virtual
(Estrutura da qual se quer calcular o deslocamento.)	(Estrutura com força unitária virtual na direção do deslocamento que se quer calcular.)
É o caso (0), que é idêntico ao item (a).	É o caso (1) com $X_1 = 1$.

PFV: $\overline{W}_E = \overline{U}$

<p>$\overline{W}_E \rightarrow$ Trabalho das forças externas do sistema virtual com os correspondentes deslocamentos externos do sistema real.</p> <p>Neste caso, o trabalho externo virtual é igual ao produto de $X_1 = 1$ por δ_{10} mais o produto da reação vertical no apoio direito do caso (1) – força de 1/3 para baixo – pelo recalque de apoio ρ:</p> $\overline{W}_E = 1 \cdot \delta_{10} + (1/3) \cdot \rho$	<p>$\overline{U} \rightarrow$ Energia de deformação interna virtual. Esta é a energia de deformação por flexão provocada pelos momentos fletores do sistema virtual $\overline{M} = M_1$ com as correspondentes rotações relativas internas do sistema real $d\theta = (M_0 / EI) dx$. Deve ser observado que o recalque de apoio ρ não provoca deformações internas (só provoca movimento de corpo rígido). Portanto, $d\theta$ é somente devido à carga de 50 kN aplicada. Assim:</p> $\overline{U} = \int_{\text{estrutura}} \overline{M} d\theta = \int_{\text{estrutura}} M_1 d\theta = \int_{\text{estrutura}} \frac{M_1 M_0}{EI} dx$
--	---

Assim:

$$\delta_{10} = (1/EI) \cdot \int_{\text{estrut.}} M_1 M_0 dx - (1/3) \cdot \rho$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 \cdot 2 \right] - \left(\frac{1}{3} \right) \cdot 0.006$$

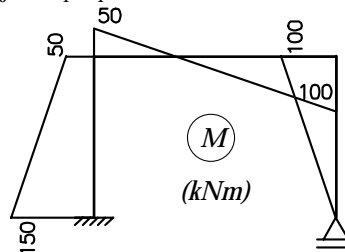
$$\delta_{10} = -4.5 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2 \right] = +3 \times 10^{-5} \text{ rad/kNm}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = 150 \text{ kNm}$$

Diagrama de Momentos Fletores

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$$



Item (c.1) – Na estrutura isostática, o diagrama de momentos fletores só depende dos valores da carga e reações, e da geometria da estrutura. Com a consideração da hipótese de pequenos deslocamentos, as equações de equilíbrio podem ser escritas para a geometria indeformada (original) da estrutura. Portanto, o diagrama de momentos fletores não se altera com a modificação do momento de inércia da seção transversal das colunas.

Item (c.2) – Na estrutura hiperestática, por ter vínculos excedentes, os esforços internos dependem da rigidez relativa entre as barras. Com as colunas mais rígidas do que a viga, as rotações das extremidades da vigas são menores do que no caso com todas as barras com rigidez iguais, se aproximando do caso de uma viga com extremidades engastadas. Portanto, o diagrama de momentos fletores fica alterado com a modificação do momento de inércia da seção transversal das colunas.