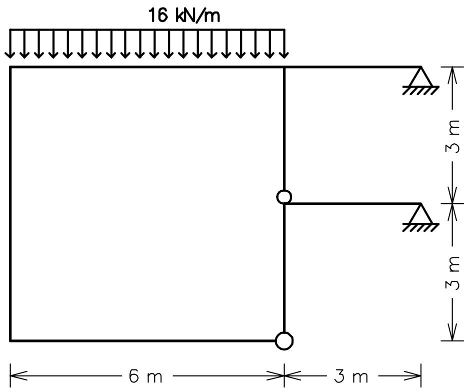
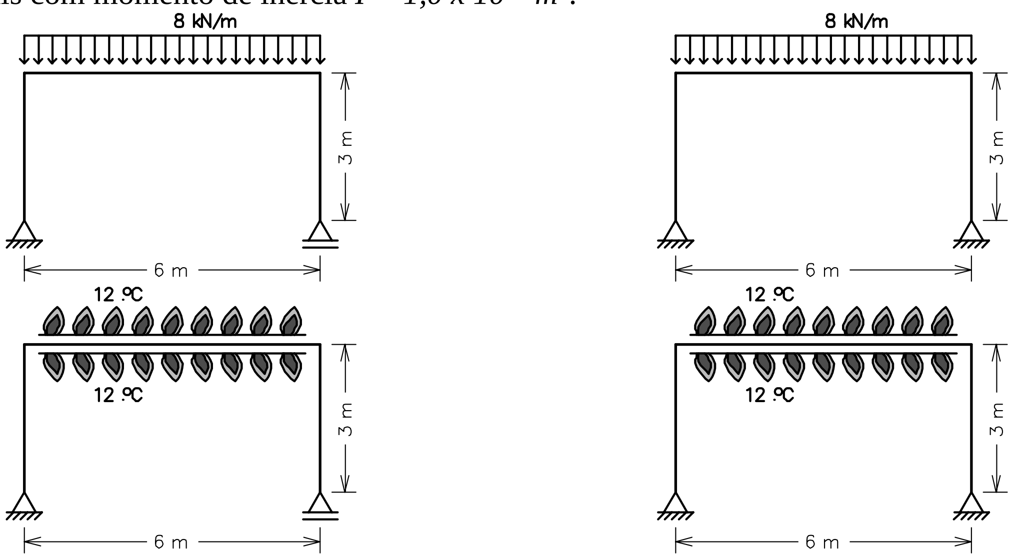
CIV 1127 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 2º Semestre – 2001

Primeira Prova – Data: 19/09/2001 – Duração: 2:45 hs – Sem Consulta

1ª Questão (5,5 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 1{,}0 \times 10^5\ kNm^2$.



2ª Questão (3,5 pontos)
Considere os quatro pórticos mostrados abaixo. Os pórticos do lado esquerdo são isostáticos e os do lado direito são hiperestáticos. Os pórticos superiores têm como solicitação uma carga uniformemente distribuída aplicada na viga. As duas estruturas inferiores têm como solicitação um aumento <u>uniforme</u> de temperatura (ΔT = 12 °C) na viga. Todas as barras têm um material com módulo de elasticidade $E = 10^8\ kN/m^2$ e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}$ /°C. Todas a barras têm seções transversais com momento de inércia $I = 1{,}0 \times 10^{-3}\ m^4$.



Pede-se:

(a) Indique os aspectos das configurações deformadas (amplificadas) das quatro estruturas.

(b) Determine os diagramas de momentos fletores das estruturas isostáticas e os aspectos (não precisa dos valores numéricos) dos diagramas de momentos fletores das estruturas hiperestáticas.

(c) Determine o diagrama de momentos fletores (com valores numéricos) da estrutura hiperestática inferior (solicitada pela variação de temperatura). Deve-se utilizar o Método das Forças, adotando <u>obrigatoriamente</u> como Sistema Principal a estrutura isostática da esquerda. Somente considere deformações por flexão. Sabe-se que o alongamento relativo interno de um elemento infenitesimal de barra devido a uma variação uniforme de temperatura é $du = \alpha\, \Delta T\, dx$. Neste caso não existe rotação relativa interna do elemento infinitesimal.

(d) Considere que as colunas dos quadros acima tiveram a seção transversal modificada para uma com momento de inércia $I = 2{,}0 \times 10^{-3}\ m^4$ (a viga não se altera). Responda:

(d.1) Os diagramas de momentos fletores das estruturas isostáticas se alteram? Por que?

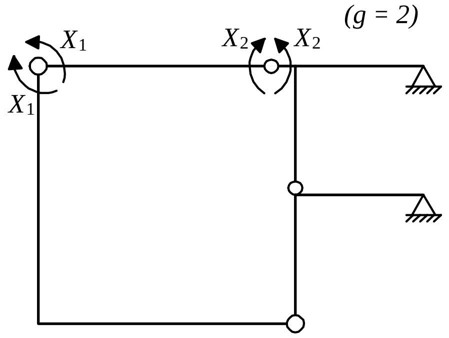
(d.2) Os diagramas de momentos fletores das estruturas hiperestáticas se alteram? Por que?

3ª Questão (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

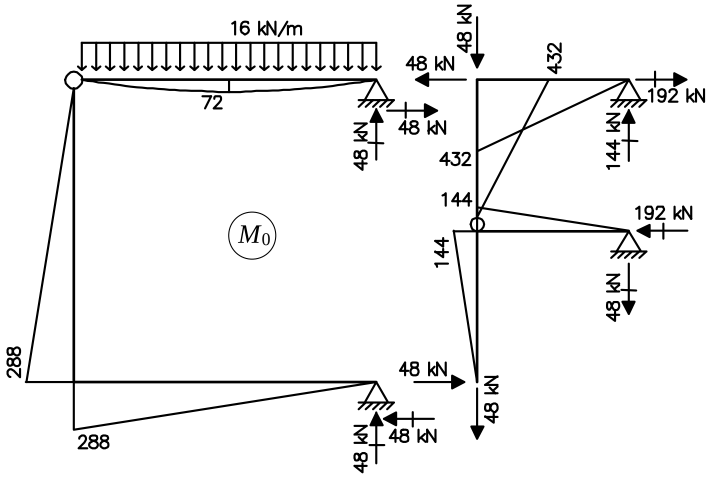
1ª Questão

Sistema Principal e Hiperestáticos

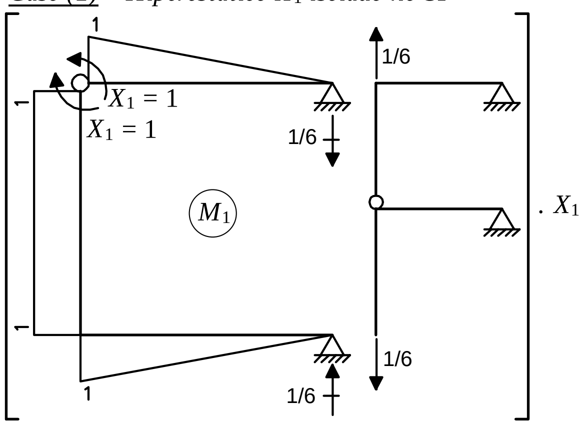
(g = 2)



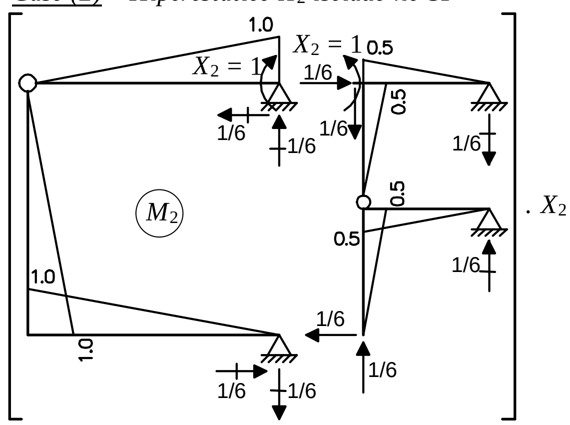
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de Compatibilidade

$$\begin{Bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}X_1=-61.3kNm\\ X_2=+170.7kNm\end{cases}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot1\cdot72\cdot6+\frac{1}{2}\cdot1\cdot288\cdot6+\frac{1}{3}\cdot1\cdot288\cdot6\right]=+\frac{1296}{EI}$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\cdot1\cdot72\cdot6-\frac{1}{3}\cdot1\cdot288\cdot6+\frac{1}{3}\cdot1\cdot288\cdot6\\ -\frac{1}{3}\cdot0.5\cdot432\cdot3+\frac{1}{3}\cdot0.5\cdot432\cdot3\\ -\frac{1}{3}\cdot0.5\cdot144\cdot3-\frac{1}{3}\cdot0.5\cdot144\cdot3\end{bmatrix}=-\frac{1440}{EI}$$

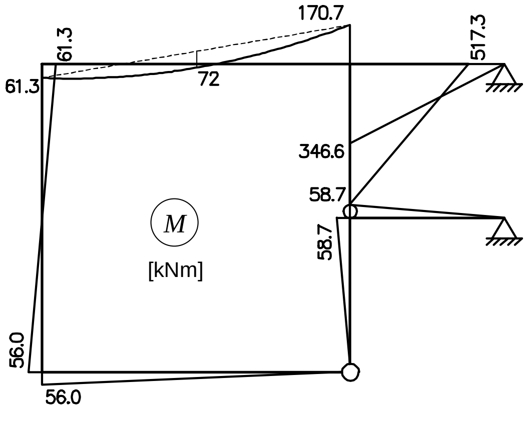
$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot6+1\cdot1\cdot6+\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot6\right]=+\frac{10}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{6}\cdot1\cdot1\cdot6-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot6-\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot6\right]=-\frac{4}{EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\cdot\left[3\cdot\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot6+4\cdot\frac{1}{3}\cdot0.5\cdot0.5\cdot3\right]=+\frac{7}{EI}$$

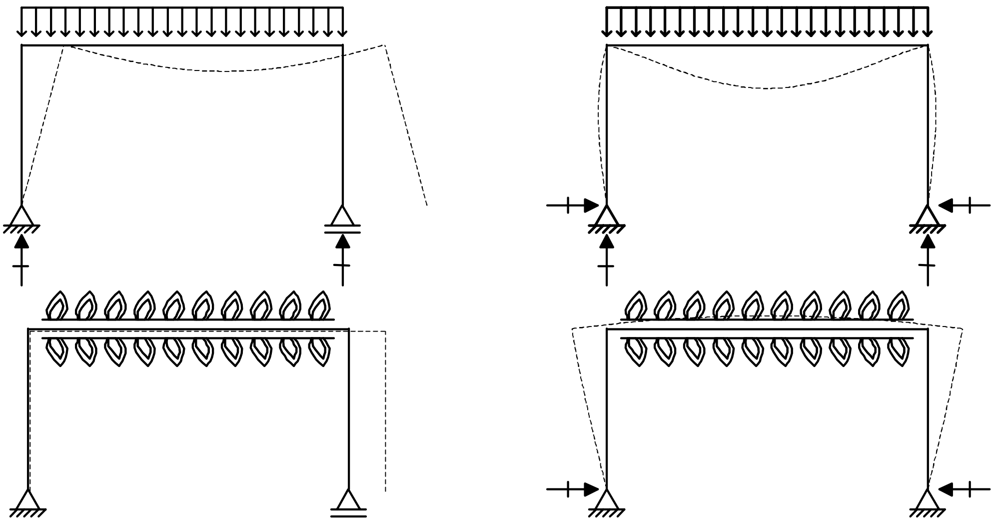
Momentos Fletores Finais

$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$

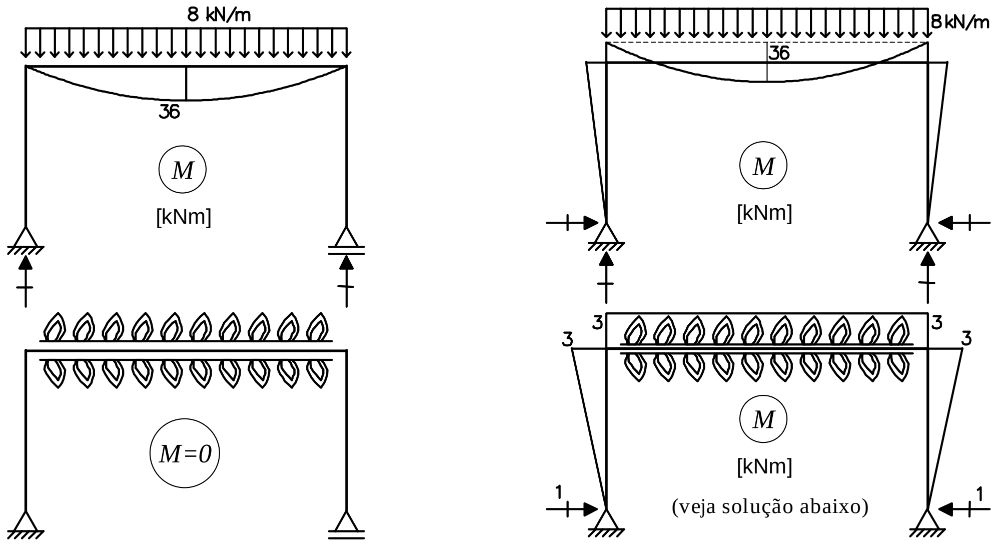


2ª Questão

Item (a)

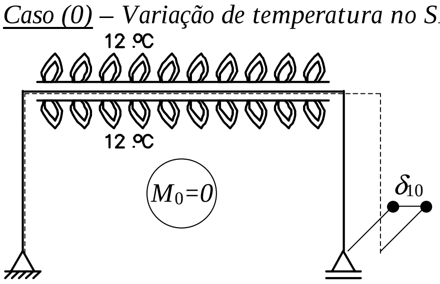


Item (b)

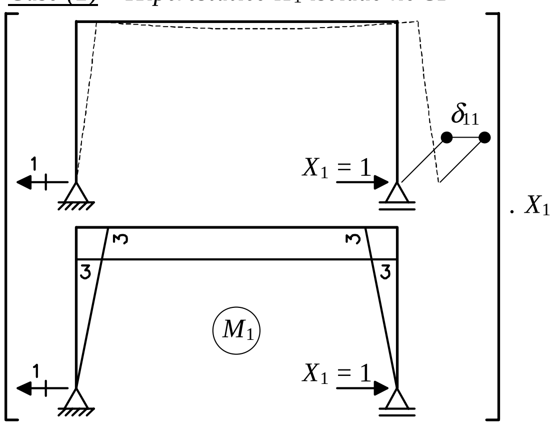


Item (c)

Caso (0) – *Variação de temperatura no SP*



Caso (1) – *Hiperestático X_1 isolado no SP*



$$\delta_{10} = \alpha \cdot \Delta T \cdot L = 10^{-5} \cdot 12 \cdot 6 = +72 \cdot 10^{-5}\, m$$

$$\delta_{11} = \int \frac{(M_1)^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left[2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 6 \right]$$

$$\delta_{11} = +72 \cdot 10^{-5}\, m / kN$$

Equação de compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = -1kN$$

Momentos fletores finais (veja acima)

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 = 0 + M_1 \cdot (-1) = -M_1$$

Item (d.1) – Na estrutura isostática, o diagrama de momentos fletores só depende dos valores da carga e reações, e da geometria da estrutura. Com a consideração da hipótese de pequenos deslocamentos, as equações de equilíbrio podem ser escritas para a geometria indeformada (original) da estrutura.
Portanto, o diagrama de momentos fletores não se altera com a modificação do momento de inércia da seção transversal das colunas.
No caso da carga uniformemente distribuída, a estrutura isostática terá sempre o diagrama de momentos fletores indicado no *item (a)* (diagrama parabólico no viga). No caso da variação de temperatura, a estrutura isostática terá sempre momentos fletores nulos.

Item (d.2) – Na estrutura hiperestática, por ter vínculos excedentes, os esforços internos dependem da rigidez relativa entre as barras. Com as colunas mais rígidas do que a viga, as rotações das extremidades da vigas são menores do que no caso com todas as barras com rigidez iguais, se aproximando do caso de uma viga com extremidades engastadas.
Portanto, o diagrama de momentos fletores fica alterado com a modificação do momento de inércia da seção transversal das colunas.
No caso da carga uniformemente distribuída, a estrutura isostática terá como o mesmo aspecto do diagrama de momentos fletores indicado no *item (a)*, mas os valores ficam alterados em relação ao diagrama com viga e colunas com mesma seção transversal.
A solução da estrutura hiperestática pelo Método das Forças, para a solicitação de variação uniforme de temperatura na viga, demonstra que a os valores dos momentos fletores finais dependem dos valores relativos entre momentos de inércia das seções transversais barras:
O *caso (0)* mostrado no *item (c)* permanece inalterado, isto é:

$\delta_{10} = \alpha \cdot \Delta T \cdot L = 10^{-5} \cdot 12 \cdot 6 = +72 \cdot 10^{-5}\, m$.

O diagrama de momentos fletores M_1 do *item (c)* é o mesmo, mas o valor do coeficiente de flexibilidade fica alterado:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_{viga}} \cdot [3 \cdot 3 \cdot 6] + \frac{1}{EI_{coluna}} \cdot \left[2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3\right]$$

$$\delta_{11} = 54 \cdot 10^{-5} + 9 \cdot 10^{-5} = 63 \cdot 10^{-5}\, m / kN$$

Equação de compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = -8/7\, kN$$

Momentos fletores finais

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 = M_1 \cdot \left(-8/7\right)$$