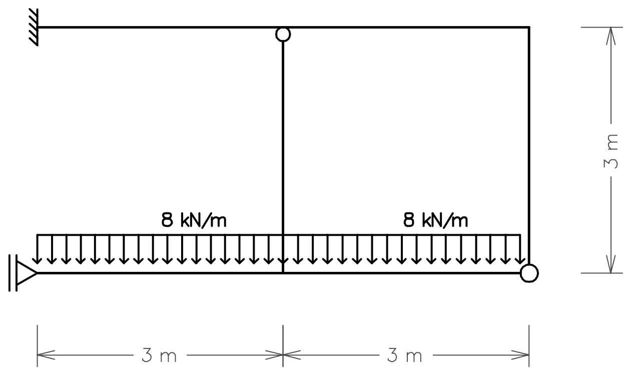
CIV 1127 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2002

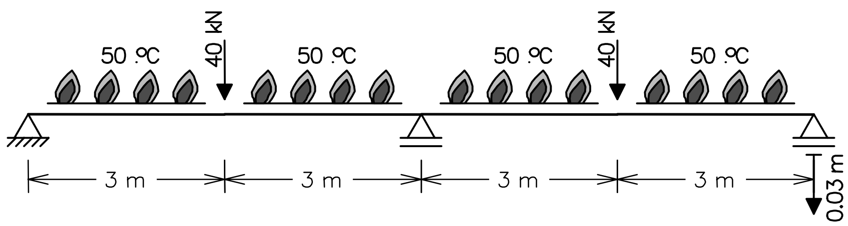
Primeira Prova – Data: 27/03/2002 – Duração: 2:45 hs – Sem Consulta

1ª Questão (6,0 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 4{,}0 \times 10^4\ kNm^2$.



2ª Questão (3,0 pontos)
Para a viga contínua com dois vãos mostrada abaixo pede-se o diagrama de momentos fletores utilizando o Método das Forças. As seguintes solicitações atuam na estrutura <u>concomitantemente</u>:

- Uma carga concentrada de *40 kN* no centro de cada vão.
- Aquecimento das fibras superiores da viga de $\Delta T_s = 50\ ºC$ ao longo de toda a sua extensão (as fibras inferiores não sofrem variação de temperatura, isto é, $\Delta T_i = 0\ ºC$).
- Recalque vertical (para baixo) de *3 cm* do apoio direito.



Sabe-se:

(a) A viga tem um material com módulo de elasticidade $E = 10^8\ kN/m^2$ e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}\ /ºC$.

(b) A viga tem seção transversal com área $A = 1{,}0 \times 10^{-2}\ m^2$ e momento de inércia $I = 1{,}0 \times 10^{-3}\ m^4$. A altura da seção transversal é $h = 0{,}60\ m$ e o seu centro de gravidade fica posicionado na metade da altura.

(c) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$du^T = \alpha\, \Delta T_{CG}\, dx$,
sendo ΔT_{CG} a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

(d) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é

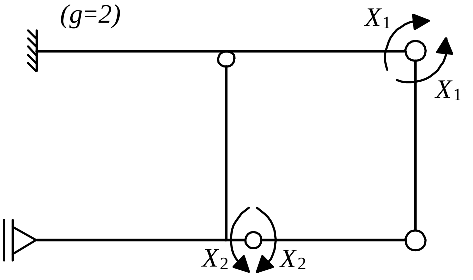
$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx.$$

3ª Questão (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

1ª Questão

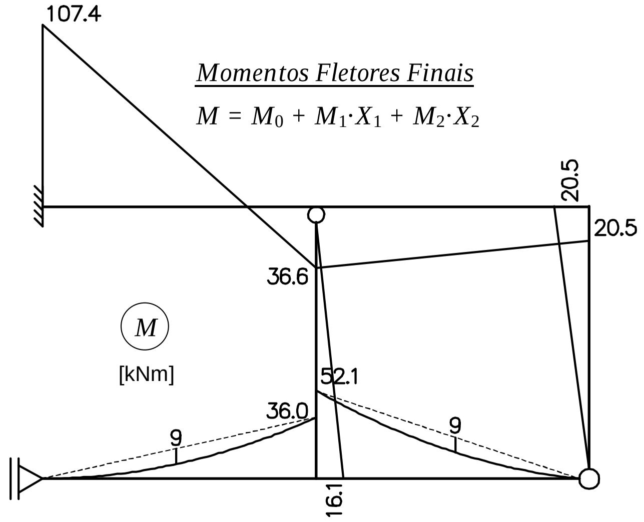
Sistema Principal e Hiperestáticos

(g=2)

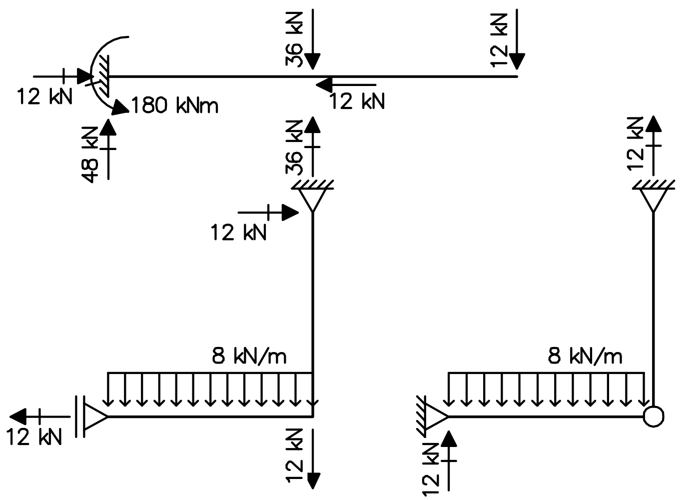


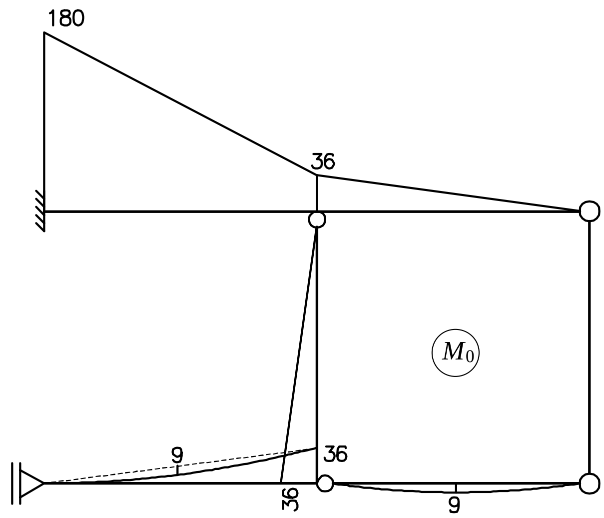
Momentos Fletores Finais

$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$

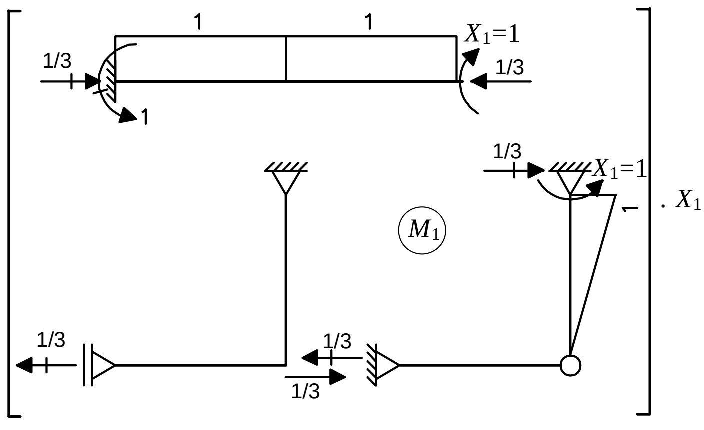


Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP

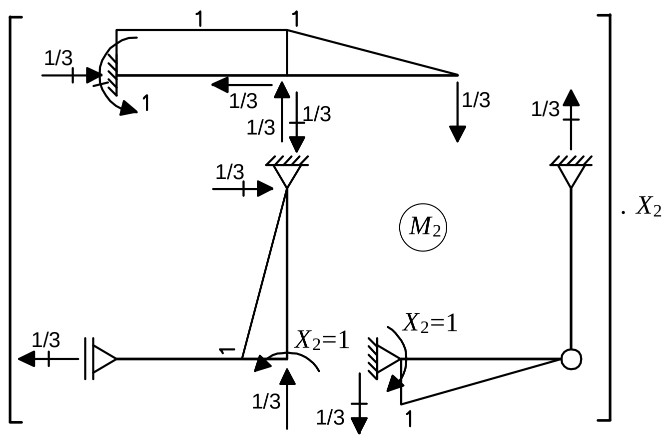




Caso (1) – X_1 isolado no SP



Caso (2) – X_2 isolado no SP



Equações de Compatibilidade

$$\begin{Bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}X_1 = -20.5kNm\\ X_2 = -52.1kNm\end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 180\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 36\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 36\cdot 3\right] = +\frac{378}{EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\cdot\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 180\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 36\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 36\cdot 3\\ + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 36\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 9\cdot 3\end{array}\right] = +\frac{405}{EI}$$

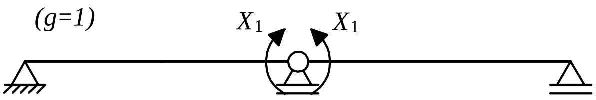
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\cdot\left[1\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right] = +\frac{7}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI}\cdot\left[1\cdot 1\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right] = +\frac{9}{2EI}$$

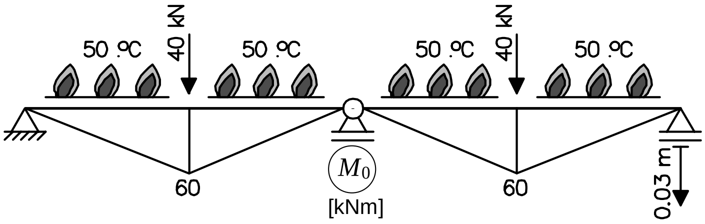
$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\cdot\left[1\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right] = +\frac{6}{EI}$$

2ª Questão

Sistema Principal e Hiperestático

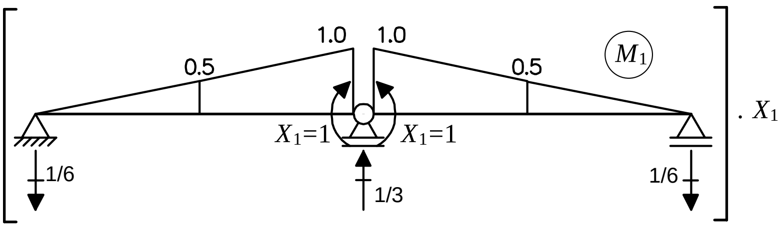


Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Como o Sistema Principal é isostático, a variação de temperatura e o recalque de apoio só provocam deslocamentos (não provocam esforços internos). Portanto, os momentos fletores só são devidos às cargas de *40 kN* aplicadas.

Caso (1) – X_1 isolado no SP



Equação de compatibilidade

$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$

δ_{10} é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula introduzida na criação do Sistema Principal no *caso (0)*.

δ_{11} é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula introduzida na criação do Sistema Principal devido a $X_1 = 1$ no *caso (1)*.

Cálculo de δ_{10} pelo Princípio das Forças Virtuais (PFV)

Sistema Real

(Estrutura da qual se quer calcular a rotação relativa.)
É o *caso (0)*.

Sistema Virtual

(Estrutura com momentos unitários virtuais na direção da rotação relativa que se quer calcular.)
É o *caso (1)* com $X_1 = 1$.

PFV: $\overline{W_E} = \overline{U}$

$\overline{W_E} \rightarrow$ Trabalho das forças externas do sistema virtual com os correspondentes deslocamentos externos do sistema real.
Neste caso, o trabalho externo virtual é igual ao produto de $X_1 = 1$ por δ_{10} mais o produto da reação vertical no apoio direito do *caso (1)* – força de 1/6 para baixo – pelo recalque de apoio:
$\overline{W_E} = 1 \cdot \delta_{10} + (-1/6) \cdot (-0.03)$.

$\overline{U} \rightarrow$ Energia de deformação interna virtual.
(Despreza-se a energia de deformação por cisalhamento e, como o esforço normal no *caso (1)* é nulo, a energia de deformação axial é nula.)
Portanto, a energia de deformação é somente devida à flexão, isto é, é a energia (virtual) provocada pelos momentos fletores do sistema virtual $\overline{M} = M_1$ com as correspondentes rotações relativas internas do sistema real $d\theta$.
A rotação relativa interna real no *caso (0)* é devida às cargas de *40 kN* aplicadas e devida à variação de temperatura:
$d\theta = d\theta^P + d\theta^T$
Onde, $d\theta^P = (M_0 / EI)dx$ e $d\theta^T = [\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)/h]dx$
Deve ser observado que o recalque de apoio não provoca rotação relativa interna (só provoca movimento de corpo rígido).
Assim:

$$\overline{U} = \int_{estrutura} \overline{M} d\theta = \int_{estrutura} M_1 d\theta = \int_{estrutura} M_1 d\theta^P + \int_{estrutura} M_1 d\theta^T$$

$$\overline{U} = \int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dx + \int \frac{M_1 \cdot \alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$

$\overline{W_E} = \overline{U} \Rightarrow$

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} \int M_1 dx - \frac{1}{6} \cdot 0.03$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 60 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 60 \cdot 3 - \frac{1}{6} \cdot 1.0 \cdot 60 \cdot 3 \right) \right]$$

$$+ \frac{\alpha \cdot (-50)}{0.60} \cdot \left[2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1.0 \right) \right] - \frac{1}{6} \cdot 0.03 = -\frac{180}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 6 \right) \right] = +\frac{4}{EI}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = 45 kNm$$

Momentos Fletores Finais

$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$