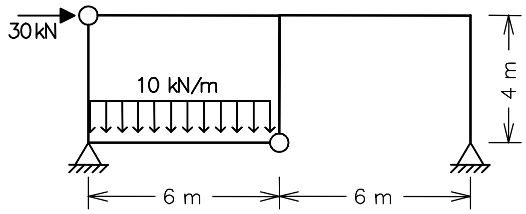
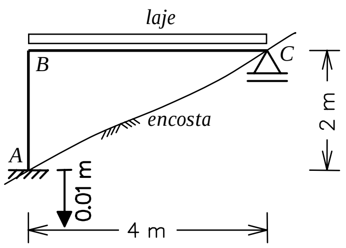
CIV 1127 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2003

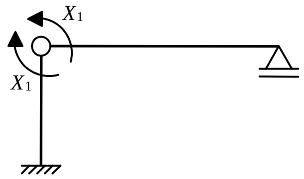
Primeira Prova – Data: 09/04/2003 – Duração: 2:45 hs – Sem Consulta

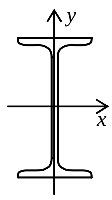
1ª Questão (5,5 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 2{,}4 \; x \; 10^4$ kNm².



2ª Questão (2,5 pontos) – *Provão de Engenharia Civil, 2002*
Em uma construção a meia encosta, a laje de piso foi apoiada em estruturas metálicas compostas de perfis *I*, colocados de modo a oferecer a maior resistência ao momento fletor atuante. Ao inspecionar a obra para recebimento, você verificou a existência de um recalque vertical de 1 cm no engaste *A* de uma das estruturas metálicas, cujo modelo estrutural é apresentado na figura abaixo (na esquerda). A fim de avaliar os esforços adicionais nessa estrutura, ocasionados pelo recalque, você utilizou o Método das Forças e, para tanto, escolheu o Sistema Principal (no qual foi colocada uma rótula no nó *B*) e o hiperestático X_1 (carga momento em ambos os lados da rótula inserida em *B*), mostrados na figura (no centro). A seção transversal do perfil e a orientação dos eixos *x* e *y* estão representadas na figura (na direita).





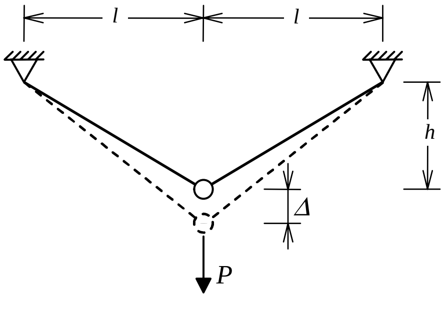


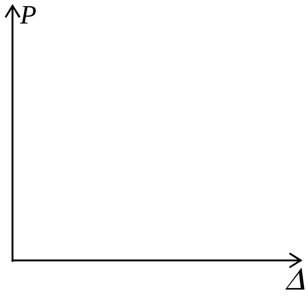
Módulo de elasticidade do material:
$E = 2{,}0 \; x \; 10^8$ kN / m²

Momentos de inércia da seção transversal:
$J_x = 5{,}1 \; x \; 10^{-5}$ m⁴
$J_y = 8{,}4 \; x \; 10^{-6}$ m⁴

Com base no exposto, pede-se o diagrama de momentos fletores, causado apenas pelo recalque em *A*.
Despreze deformações axiais das barras.

3ª Questão (1,0 ponto)
Considerando que o material da estrutura abaixo tem um comportamento linear (relações lineares entre tensões e deformações), desenhe o aspecto do gráfico que relaciona a carga aplicada *P* e o deslocamento Δ do nó inferior para duas situações:
(a) Deslocamento Δ pode ser considerado pequeno em relação às dimensões da estrutura.
(b) Deslocamento Δ <u>não</u> pode ser considerado pequeno em relação às dimensões da estrutura.

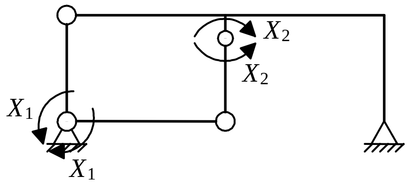




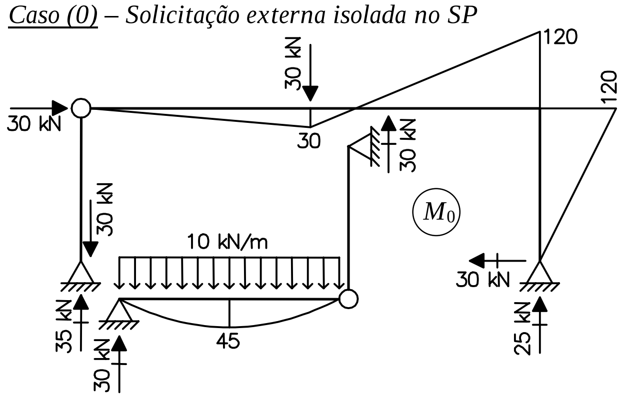
4ª Questão (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

1ª Questão

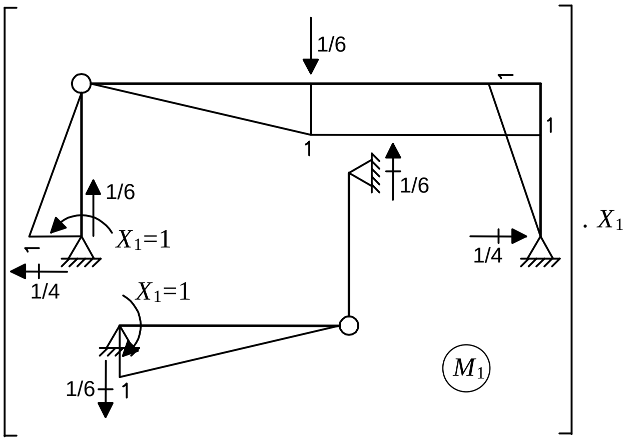
<u>*Sistema Principal e Hiperestáticos*</u>
(g=2)



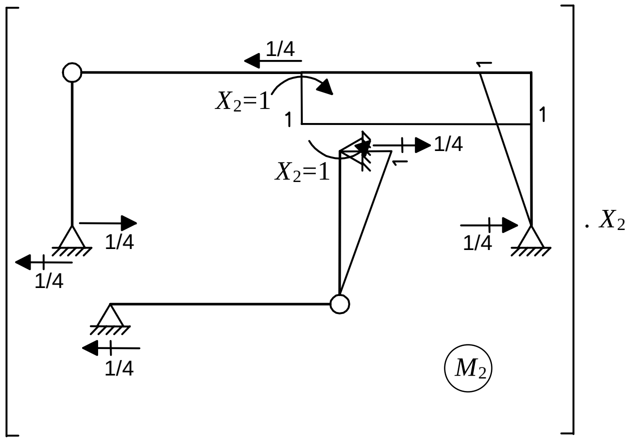
<u>*Caso (0)*</u> *– Solicitação externa isolada no SP*



<u>*Caso (1)*</u> *– X_1 isolado no SP*



<u>*Caso (2)*</u> *– X_2 isolado no SP*



<u>*Equações de Compatibilidade*</u>

$$\begin{Bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}X_1=-13{,}0kNm\\ X_2=+60{,}6kNm\end{cases}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\cdot1\cdot30\cdot6+\frac{1}{2}\cdot1\cdot30\cdot6-\frac{1}{2}\cdot1\cdot120\cdot6\\ -\frac{1}{3}\cdot1\cdot120\cdot4+\frac{1}{3}\cdot1\cdot45\cdot6\end{bmatrix}=-\frac{280}{EI}$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot1\cdot30\cdot6-\frac{1}{2}\cdot1\cdot120\cdot6-\frac{1}{3}\cdot1\cdot120\cdot4\right]=-\frac{430}{EI}$$

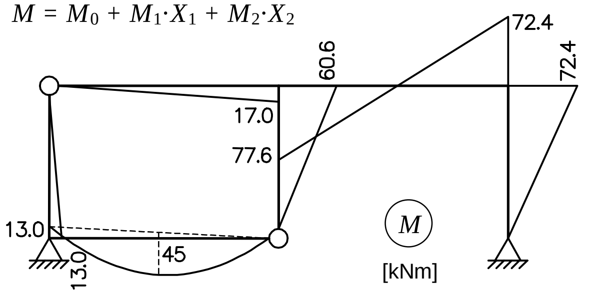
$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix}2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot6\right)+1\cdot1\cdot6\\ +2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot4\right)\end{bmatrix}=+\frac{38}{3EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\cdot\left[1\cdot1\cdot6+\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot4\right]=+\frac{22}{3EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\cdot\left[1\cdot1\cdot6+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot4\right)\right]=+\frac{26}{3EI}$$

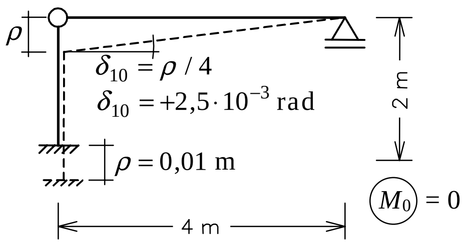
<u>*Momentos Fletores Finais*</u>

$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$

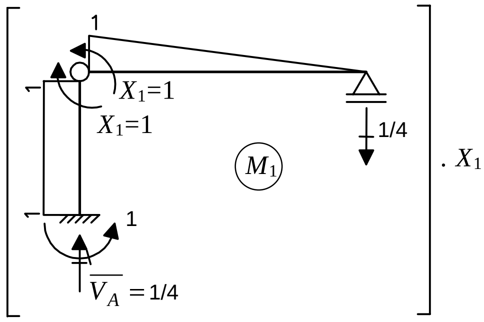


2ª Questão

Caso (0) – *Solicitação externa isolada no SP*



Caso (1) – *X_1 isolado no SP*



Equação de compatibilidade

$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$

δ_{10} é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula do Sistema Principal provocada pelo recalque de apoio no *caso (0)*.

δ_{11} é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula do Sistema Principal provocada por $X_1 = 1$ no *caso (1)*.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[1 \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \right] = + \frac{10}{3EI}$$

O enunciado diz que os perfis metálicos foram colocados de modo a oferecer a maior resistência ao momento fletor atuante. Portanto, o momento de inércia da seção transversal a ser adotado é o maior momento de inércia da barra: $I = J_x = 5{,}1 \ x \ 10^{-5}$ m^4.

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \rightarrow 2{,}5 \cdot 10^{-3} + \frac{10}{3 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 5{,}1 \cdot 10^{-5}} X_1 \Rightarrow X_1 = -7{,}65 \text{ kNm}.$$

Cálculo de δ_{10} pelo Princípio das Forças Virtuais (PFV)

Sistema Real

(Estrutura da qual se quer calcular a rotação relativa.)

É o *caso (0)*.

Sistema Virtual

(Estrutura com momentos unitários virtuais na direção da rotação relativa que se quer calcular.)

É o *caso (1)* com $X_1 = 1$.

PFV: $\overline{W_E} = \overline{U}$

$\overline{W_E} \rightarrow$ Trabalho das forças externas do sistema virtual com os correspondentes deslocamentos externos do sistema real.

Neste caso, o trabalho externo virtual é igual ao produto de $X_1 = 1$ por δ_{10} mais o produto da reação vertical no apoio esquerdo do *caso (1)* – força de $1/4$ para cima – pelo recalque de apoio:

$\overline{W_E} = 1 \cdot \delta_{10} + \overline{V_A} \cdot \rho$

$\overline{W_E} = 1 \cdot \delta_{10} + (+1/4) \cdot (-0{,}01)$

$\overline{U} \rightarrow$ Energia de deformação interna virtual.

O recalque de apoio não provoca deformações internas (só provoca movimentos de corpo rígido das barras). Portanto:

$\overline{U} = 0$

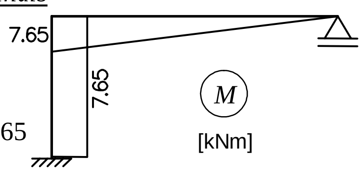
$\overline{W_E} = \overline{U} \Rightarrow \delta_{10} + (+1/4) \cdot (-0{,}01) = 0$

$\therefore \delta_{10} = 0{,}01 / 4 = +2{,}5 \cdot 10^{-3}$ rad

Momentos Fletores Finais

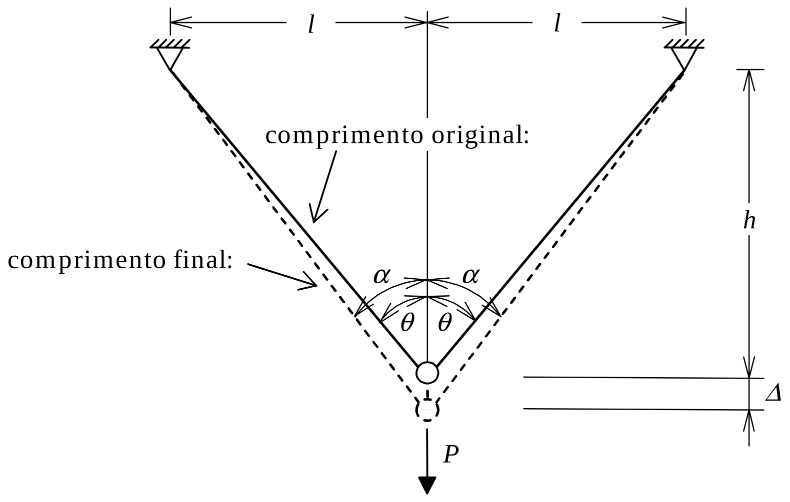
$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$

$M_0 = 0$ $\quad X_1 = -7{,}65$



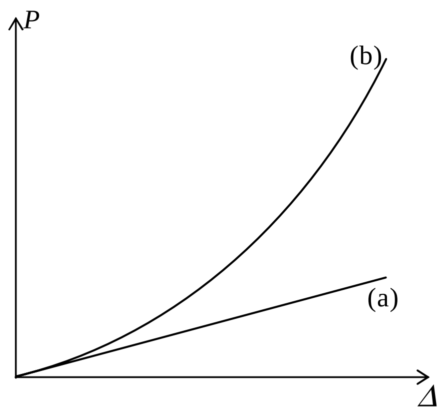
3ª Questão

Na configuração indeformada o ângulo entre as barras e o eixo vertical é θ, e na configuração deformada o ângulo é α, tal como indicado na figura abaixo:



Item (a)
Considerando que o deslocamento Δ é pequeno em relação às dimensões da estrutura, as equações de equilíbrio podem ser escritas para a geometria da estrutura na configuração indeformada. Nesse caso, o ângulo α é aproximado por θ. Portanto, como o material tem um comportamento linear, a relação entre a força P e o deslocamento Δ é linear.

Item (b)
Considerando que o deslocamento Δ não é pequeno em relação às dimensões da estrutura, as equações de equilíbrio têm que ser escritas nas configuração final (deformada) da estrutura. Isso acarreta em um comportamento não-linear para a relação entre P e Δ.



Observa-se na figura que o coeficiente angular da resposta linear do item (a) é igual à inclinação da curva carga-deslocamento não-linear para $\Delta = 0$. Isso mostra que a resposta linear é uma aproximação da resposta não-linear para pequenos deslocamentos.