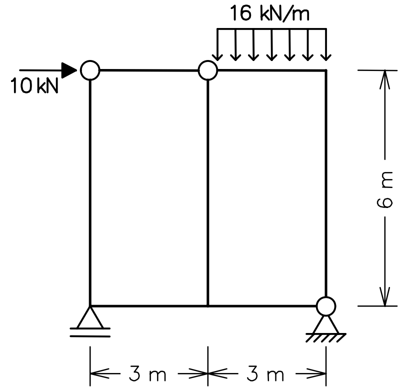
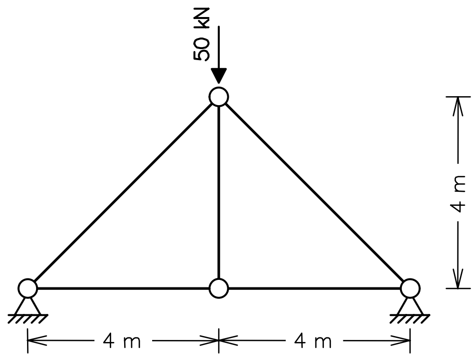
# CIV 1127 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 2º Semestre – 2003

## Primeira Prova – Data: 17/09/2003 – Duração: 2:45 hs – Sem Consulta

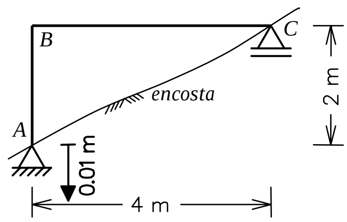
**1ª Questão** (5,5 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 1{,}0 \; x \; 10^4$ kNm$^2$.




**2ª Questão** (2,5 pontos)
Utilizando o Método das Forças, determine o diagrama de esforços normais para a treliça hiperestática ao lado submetida ao carregamento indicado e a um aumento uniforme de temperatura de 50 °C em todas as barras. Todas as barras têm o mesmo valor para a inércia axial $EA = 1{,}0 \; x \; 10^5$ kN e para o coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 1{,}0 \; x \; 10^{-5}$ /°C. Sabe-se que o deslocamento axial relativo interno para uma variação uniforme de temperatura $T$ é igual a: $du^T = \alpha T dx$.



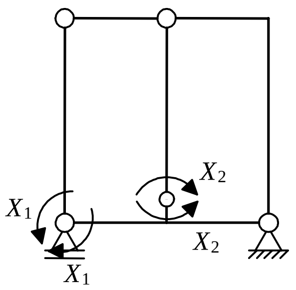

**3ª Questão** (1,0 ponto)
Uma estrutura situada em uma encosta sofre um recalque em um de seus apoios. O modelo estrutural é mostrado ao lado, onde é indicado que o apoio $A$ tem um recalque vertical de 1 cm para baixo. Calcule o deslocamento horizontal do apoio $C$ utilizando o Princípio das Forças Virtuais (PFV). Todos os passos devem ser mostrados e justificados.



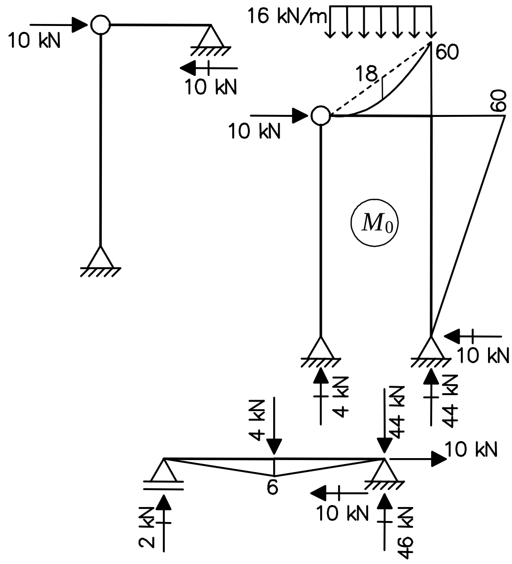

**4ª Questão** (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

**1ª Questão**

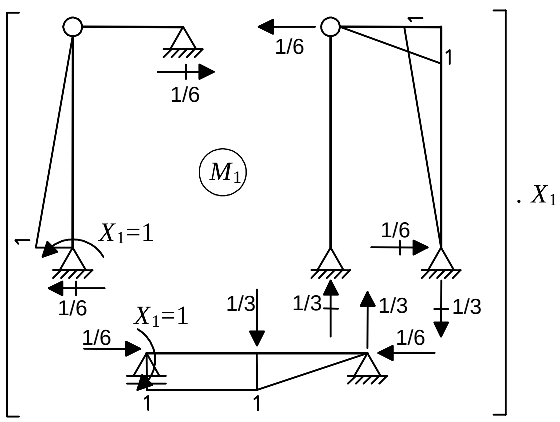
*Sistema Principal e Hiperestáticos*
*(g=2)*



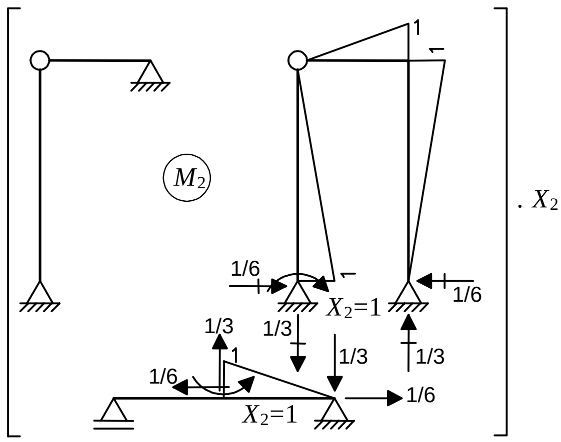

*Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP*




*Caso (1) – $X_1$ isolado no SP*




*Caso (2) – $X_2$ isolado no SP*




*Equações de Compatibilidade*

$$\begin{Bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}X_1=+6{,}8\ \text{kNm}\\ X_2=-21{,}5\ \text{kNm}\end{cases}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 60\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 3-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 60\cdot 6\\ +\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 6\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 6\cdot 3\end{bmatrix}=-\frac{147}{EI}$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 60\cdot 3-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 60\cdot 6-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 6\cdot 3\right]=+\frac{156}{EI}$$

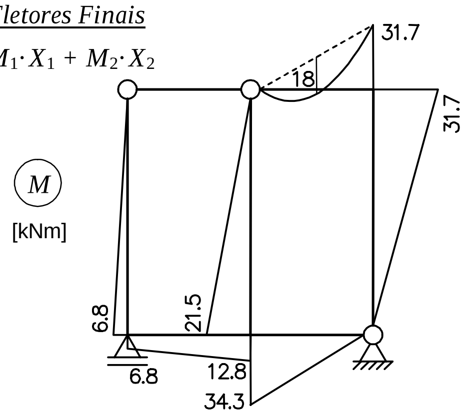
$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix}2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right)+\\ 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right)+1\cdot 1\cdot 3\end{bmatrix}=+\frac{9}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\cdot\left[2\cdot\left(-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right)-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right]=-\frac{4}{EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\cdot\left[2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right)+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right)\right]=+\frac{6}{EI}$$

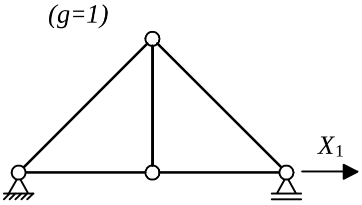
*Momentos Fletores Finais*

$M = M_0 + M_1\cdot X_1 + M_2\cdot X_2$

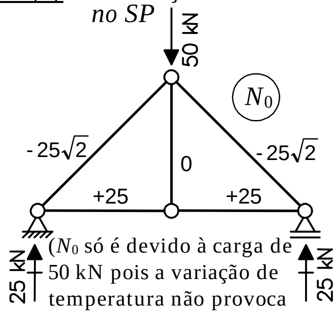


**2ª Questão**

*Sistema Principal e Hiperestáticos* *(g=1)*

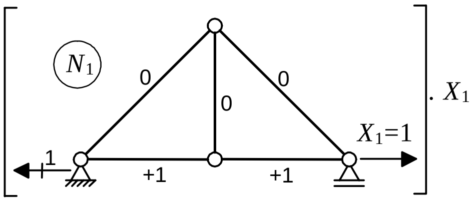



*Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP*




($N_0$ só é devido à carga de 50 kN pois a variação de temperatura não provoca esforços no SP isostático )

*Caso (1) – $X_1$ isolado no SP*




*Equação de Compatibilidade*

$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$

Termo de carga: $\delta_{10} = \delta_{10}^P + \delta_{10}^T$

$\delta_{10}^P \rightarrow$ deslocamento horizontal no apoio da direita devido à carga $P$ = 50 kN no caso (0).

$\delta_{10}^P \rightarrow$ deslocamento horizontal no apoio da direita devido à variação uniforme de temperatura $T$ = 50 °C no caso (0).

$$\delta_{10}^P = \int_{estrutura} \frac{N_1 N_0}{EA} dx = \frac{1}{EA} \cdot [2 \cdot (1 \cdot 25 \cdot 4)] = +\frac{200}{EA}$$

$$\delta_{10}^T = \int_{estrutura} N_1 du^T = \int N_1 \alpha T dx = 50\alpha \cdot \int N_1 dx = 50\alpha \cdot [2 \cdot (1 \cdot 4)] = +400\alpha$$

$$\delta_{11} = \int_{estrutura} \frac{N_1^2}{EA} dx = \frac{1}{EA} \cdot [2 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 4)] = +\frac{8}{EA}$$

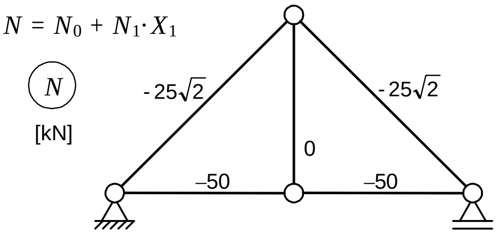
$EA = 1 \cdot 10^5$ kN $\quad \alpha = 1 \cdot 10^{-5}$ /°C

$\Rightarrow (200 + 400) \cdot 10^{-5} + 8 \cdot 10^{-5} X_1 = 0$

$\therefore X_1 = -75$ kN

*Esforços Normais Finais*

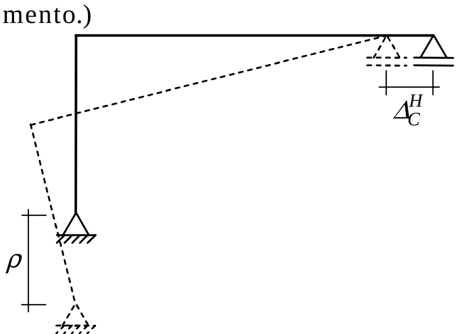
$N = N_0 + N_1 \cdot X_1$




**3ª Questão** *Cálculo do deslocamento horizontal $\Delta_C^H$ do apoio C pelo Princípio das Forças Virtuais (PFV)*

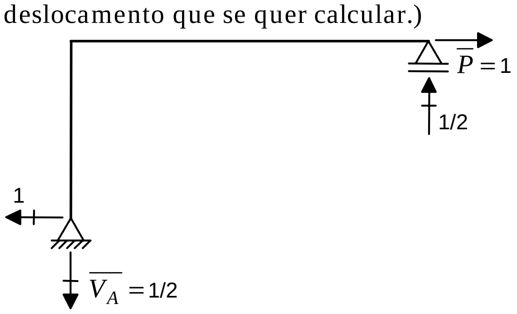
Sistema Real

(Estrutura da qual se quer calcular o deslocamento.)




Sistema Virtual

(Estrutura com carga virtual na direção do deslocamento que se quer calcular.)




*PFV*: $\overline{W_E} = \overline{U}$

$\overline{W_E} \rightarrow$ Trabalho das forças externas do sistema virtual com os correspondentes deslocamentos externos do sistema real.

Neste caso, o trabalho externo virtual é igual ao produto de $\overline{P} = 1$ por $\Delta_C^H$ mais o produto da reação vertical no apoio esquerdo – reação $\overline{V_A} = 1/2$ para baixo – pelo recalque de apoio:

$\overline{W_E} = 1 \cdot \Delta_C^H + \overline{V_A} \cdot \rho$

$\overline{W_E} = 1 \cdot \Delta_C^H + (-1/2) \cdot (-0{,}01)$

$\overline{U} \rightarrow$ Energia de deformação interna virtual.

O recalque de apoio não provoca deformações internas (só provoca movimentos de corpo rígido da estrutura). Portanto:

$\overline{U} = 0$

$\overline{W_E} = \overline{U} \Rightarrow \Delta_C^H + (-1/2) \cdot (-0{,}01) = 0$

$\therefore \Delta_C^H = 0{,}01/2 = -5 \cdot 10^{-3}$ m $\quad (\leftarrow)$