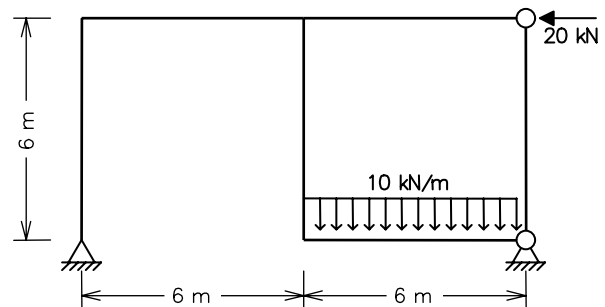


# CIV 1127 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2004

## Primeira Prova – Data: 31/03/2004 – Duração: 2:45 hs – Sem Consulta

### 1ª Questão (5,5 pontos)

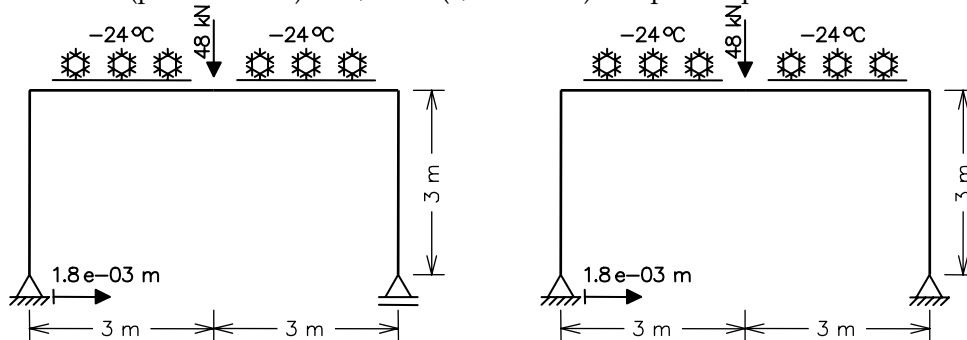
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão  $EI = 10^5 \text{ kNm}^2$ .



### 2ª Questão (3,5 pontos)

Considere os pórticos planos mostrados abaixo sobre os quais atuam concomitantemente as seguintes solicitações:

- Uma carga concentrada vertical de 48 kN no centro viga (barra horizontal).
- Resfriamento das fibras superiores da viga de  $\Delta T_s = -24 \text{ }^\circ\text{C}$  ao longo de toda a sua extensão (as fibras inferiores não sofrem variação de temperatura, isto é,  $\Delta T_i = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ ).
- Recalque horizontal (para a direita) de 1,8 mm ( $1,8 \times 10^{-3} \text{ m}$ ) do apoio esquerdo.



Sabe-se:

- (1) O material tem módulo de elasticidade  $E = 10^8 \text{ kN/m}^2$  e coeficiente de dilatação térmica  $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ .
- (2) As barras da estrutura têm seção transversal com área  $A = 10^{-1} \text{ m}^2$  e momento de inércia  $I = 10^{-3} \text{ m}^4$ . A altura da seção transversal é  $h = 0,60 \text{ m}$  e o seu centro de gravidade fica posicionado na metade da altura.
- (3) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é

$$du^T = \alpha \Delta T_{CG} dx,$$

sendo  $\Delta T_{CG}$  a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

- (4) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é

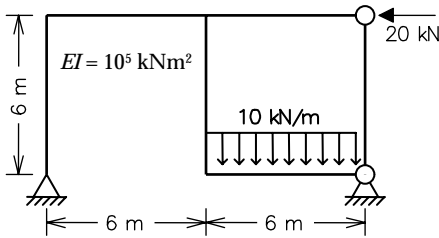
$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx.$$

Pede-se:

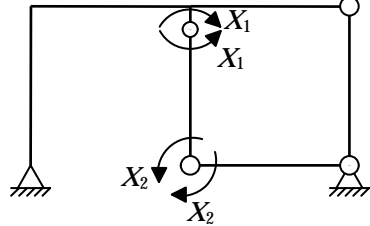
- (0,5 ponto) Determine o diagrama de momentos fletores da estrutura isostática da esquerda para as três solicitações concomitantes.
- (2,5 pontos) Utilizando o Método das Forças, determine o diagrama de momentos fletores da estrutura hiperestática da direita para as três solicitações concomitantes. Utilize obrigatoriamente como Sistema Principal o pórtico isostático mostrado na figura da esquerda. No cálculo do termo de carga devido à carga aplicada e no cálculo do coeficiente de flexibilidade, considere apenas deformações por flexão.
- (0,5 ponto) Considere que a viga (barra horizontal) da estrutura teve a seção transversal modificada para uma com momento de inércia  $I = 2,0 \times 10^{-3} \text{ m}^4$  (as outras barras não se alteram). Responda (não precisa fazer nenhum cálculo):
  - (c.1) O diagrama de momentos fletores da estrutura isostática se altera? Por que?
  - (c.2) O diagrama de momentos fletores da estrutura hiperestática se altera? Por que?

### 3ª Questão (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

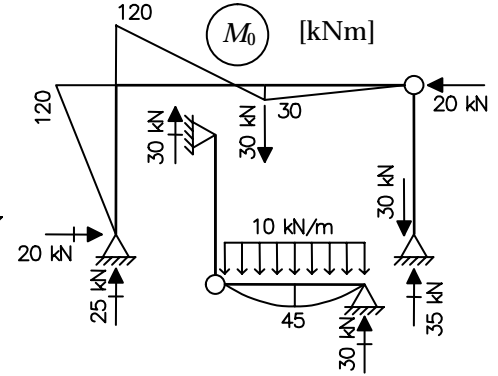
**1ª Questão**



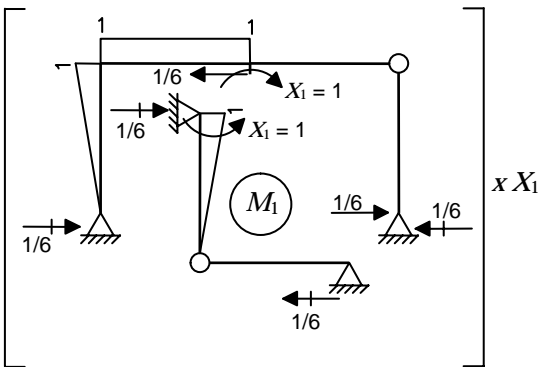
*Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos*



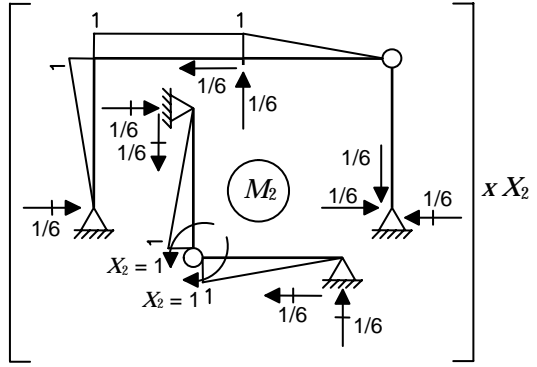
*Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP*



*Caso (1) – Hiperestático X1 isolado no SP*



*Caso (2) – Hiperestático X2 isolado no SP*



*Equações de compatibilidade:*

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{cases} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} X_1 \\ X_2 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -36,9 \text{ kNm} \\ X_2 = -20,1 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ +\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 120 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 30 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 120 \cdot 6 \right] = +\frac{510}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ +1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \right) \right] = +\frac{10}{EI}$$

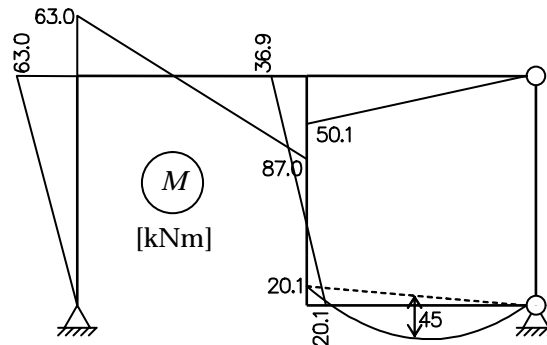
$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ +\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 120 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 30 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 120 \cdot 6 \right] = +\frac{540}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ +1 \cdot 1 \cdot 6 + 4 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \right) \right] = +\frac{14}{EI}$$

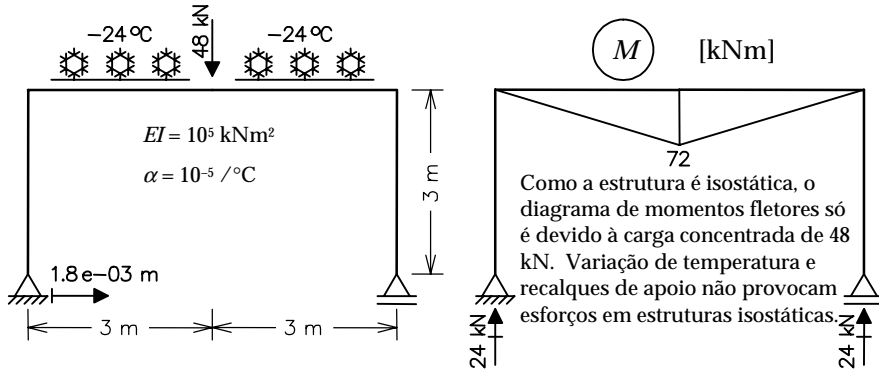
$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ +1 \cdot 1 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 - \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \right] = +\frac{7}{EI}$$

*Momentos Fletores Finais:*

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$$

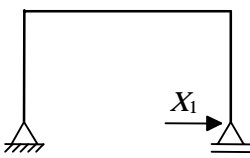


2ª Questão – Item (a)

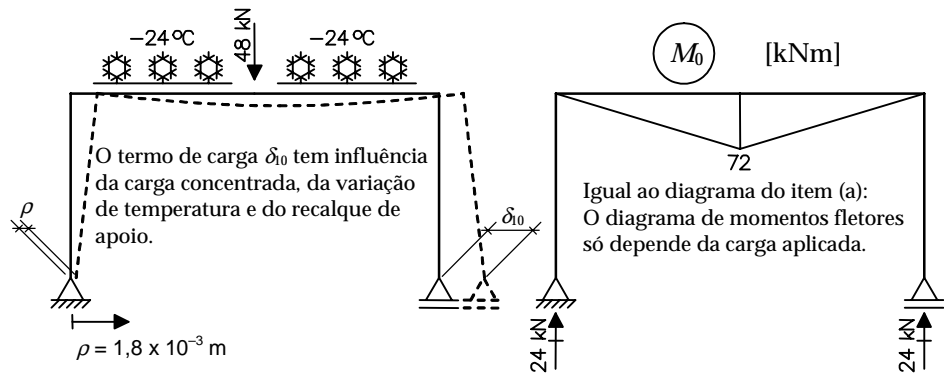


2ª Questão – Item (b)

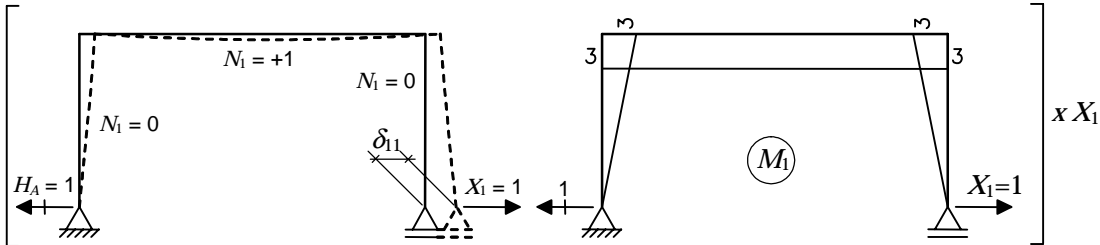
Sistema Principal e Hiperestático ( $g=1$ )



Caso (0) – Solicitações externas isoladas no SP



Caso (1) –  $X_1$  isolado no SP



Equação de compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

Sendo  $\delta_{10} = \delta_{10}^P + \delta_{10}^T + \delta_{10}^\rho$ :

$\delta_{10}^P$  → deslocamento horizontal da seção do apoio da direita devido à carga concentrada no caso (0).

$\delta_{10}^T$  → deslocamento horizontal da seção do apoio da direita devido à variação de temperatura no caso (0).

$\delta_{10}^\rho$  → deslocamento horizontal da seção do apoio da direita devido ao recalque de apoio no caso (0).

$$\delta_{10}^P = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 72 \cdot 3 \right) \right] = +648 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

(considerando apenas deformação por flexão)

$$\delta_{10}^T = \int_{\text{viga}} M_1 d\theta^T + \int_{\text{viga}} N_1 du^T$$

$$d\theta^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot (24)}{0,60} dx = \alpha \cdot 40 \cdot dx$$

$$du^T = \alpha \cdot \Delta T_{GC} \cdot dx = \alpha \cdot (-12) \cdot dx$$

$$\delta_{10}^T = \alpha \cdot 40 \cdot \int_{\text{viga}} M_1 dx - \alpha \cdot 12 \cdot \int_{\text{viga}} N_1 dx$$

$$\delta_{10}^T = \alpha \cdot 40 \cdot 6 \cdot 3 - \alpha \cdot 12 \cdot 6 \cdot 1 = +648 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$1 \cdot \delta_{10}^P - H_A \cdot \rho = 0$$

$$\delta_{10}^P = +1,8 \cdot 10^{-3} = +180 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{(M_1)^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left[ 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 6 \right]$$

(considerando apenas deformação por flexão)

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \rightarrow$$

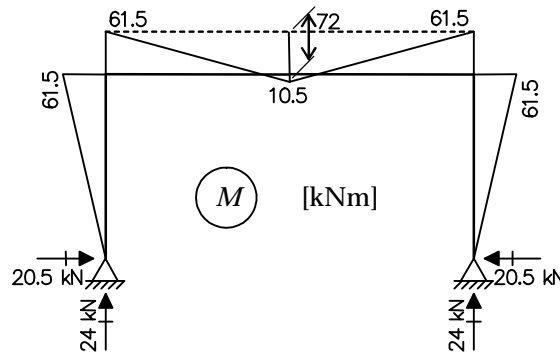
$$(648 + 648 + 180) \cdot 10^{-5} + 72 \cdot 10^{-5} \cdot X_1 = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = -20,5 \text{ kN}$$

$$\delta_{11} = +72 \cdot 10^{-5} \text{ m/kN}$$

### Momentos fletores finais

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$$



### 2ª Questão – Item (c)

*Item (c.1)* – Na estrutura isostática, o diagrama de momentos fletores só depende dos valores da carga e reações, e da geometria da estrutura. Com a consideração da hipótese de pequenos deslocamentos, as equações de equilíbrio podem ser escritas para a geometria indeformada (original) da estrutura.

No caso da carga concentrada aplicada, a estrutura isostática terá sempre o diagrama de momentos fletores indicado no *item (a)* (diagrama triangular na viga). Momentos fletores devidos à variação de temperatura e ao recalque de apoio na estrutura isostática são sempre nulos.

Portanto, o diagrama de momentos fletores não se altera com a modificação do momento de inércia da seção transversal da viga.

*Item (c.2)* – Na estrutura hiperestática, por ter vínculos excedentes, os esforços internos dependem da rigidez relativa entre as barras. A solução da estrutura hiperestática pelo Método das Forças mostrada no *item (b)* demonstra que os valores dos momentos fletores finais dependem dos valores relativos entre momentos de inércia das seções transversais das barras. Por exemplo, o valor do coeficiente de flexibilidade  $\delta_{11} = +72 \cdot 10^{-5} \text{ m/kN}$  corresponde ao caso de todas as barras com mesma seção transversal. Esse valor seria diferente caso a viga tivesse uma seção transversal com o dobro do momento de inércia, alterando assim a resposta da estrutura.

Portanto, o diagrama de momentos fletores fica alterado com a modificação do momento de inércia da seção transversal da viga.