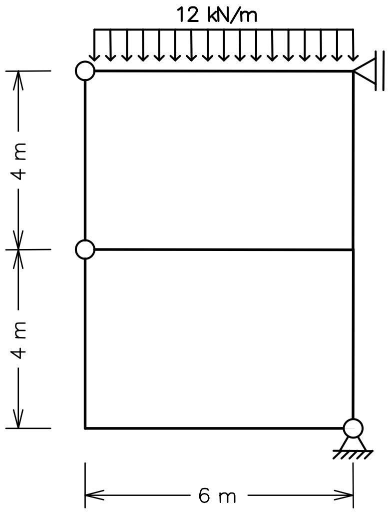
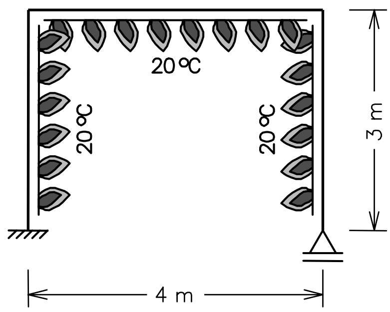
CIV 1127 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 2º Semestre – 2004

Primeira Prova – Data: 13/09/2004 – Duração: 2:45 hs – Sem Consulta

1ª Questão (5,5 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 10^5$ kNm².



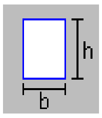
2ª Questão (3,5 pontos)
O pórtico ao lado sofreu um aquecimento interno de 20 °C (a temperatura externa não variou). Pede-se o diagrama de momentos fletores provocado por esta variação de temperatura. Considere que as barras do pórtico podem se deformar axialmente, isto é, não despreze a energia de deformação axial.



Sabe-se:

(1) O material tem módulo de elasticidade $E = 10^8$ kN/m² e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}$ /°C.

(2) As barras da estrutura têm a seção transversal retangular indicada abaixo, que foi posicionada de modo a oferecer a maior resistência ao momento fletor atuante:



$h = 0.50$ m
$b = 0.20$ m

$\boxed{A = b \cdot h}$ $\boxed{I = \dfrac{b \cdot h^3}{12}}$

(3) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$du^T = \alpha \, \Delta T_{CG} \, dx$,
sendo ΔT_{CG} a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

(4) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é

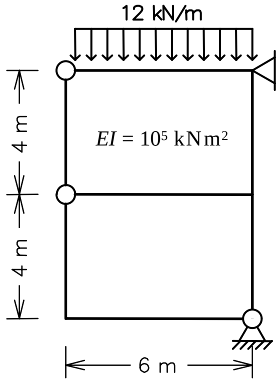
$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_e)}{h} dx$$

sendo $\Delta T_i = +20$ °C a variação de temperatura das fibras interiores e $\Delta T_e = 0$ °C a variação de temperatura das fibras exteriores. Considere que $d\theta^T$ é positivo quando alonga as fibras interiores.

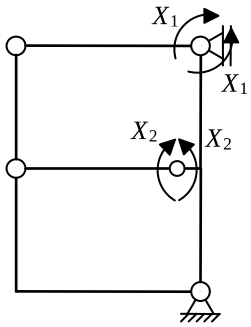
(5) Considere que os momentos fletores são positivos quando tracionam as fibras interiores.

3ª Questão (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

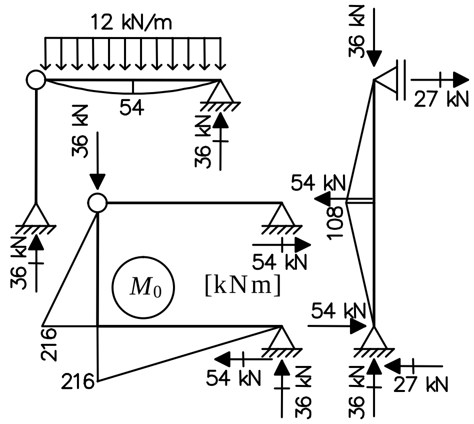
1ª Questão



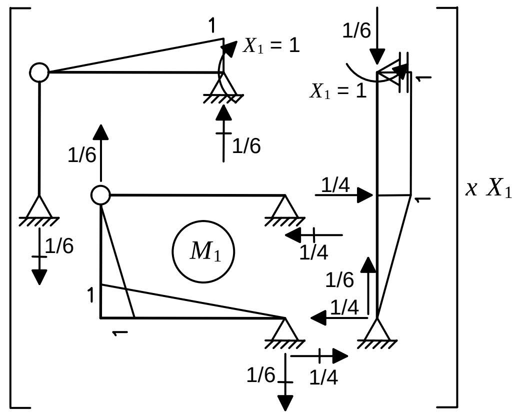
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos



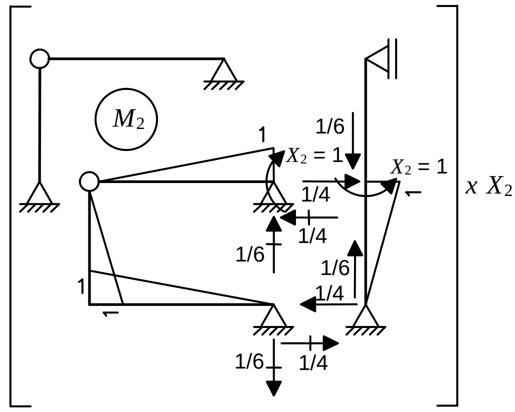
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases}\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix}-1188 \\ -864\end{Bmatrix} + \frac{1}{3EI}\begin{bmatrix}+32 & +14 \\ +14 & +20\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1 \\ X_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0 \\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}X_1 = +78.8 \text{ kNm} \\ X_2 = +74.2 \text{ kNm}\end{cases}$$

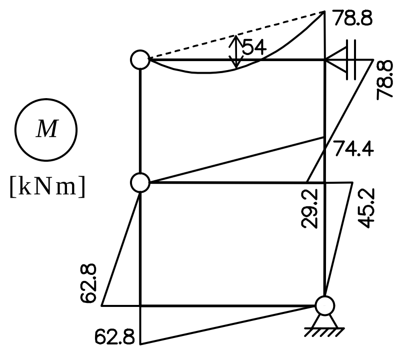
$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 54\cdot 6 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 108\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 216\cdot 4 \\ -\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 108\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 216\cdot 6\end{bmatrix} = -\frac{1188}{EI} \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix}+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 4\right) \\ +\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\end{bmatrix} = +\frac{14}{3EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 216\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 108\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 216\cdot 6\right] = -\frac{864}{EI}$$

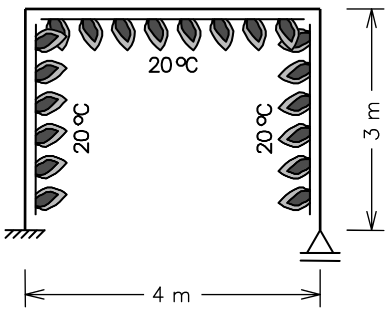
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right) + 1\cdot 1\cdot 4 + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 4\right)\right] = +\frac{32}{3EI} \qquad \delta_{22} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right) + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 4\right)\right] = +\frac{20}{3EI}$$

Momentos Fletores Finais:

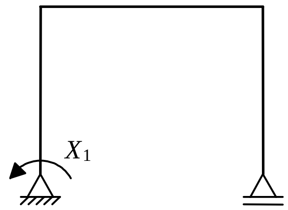
$$M = M_0 + M_1\cdot X_1 + M_2\cdot X_2$$



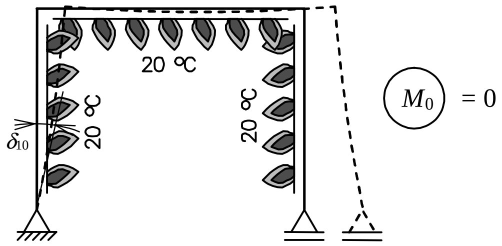
2ª Questão



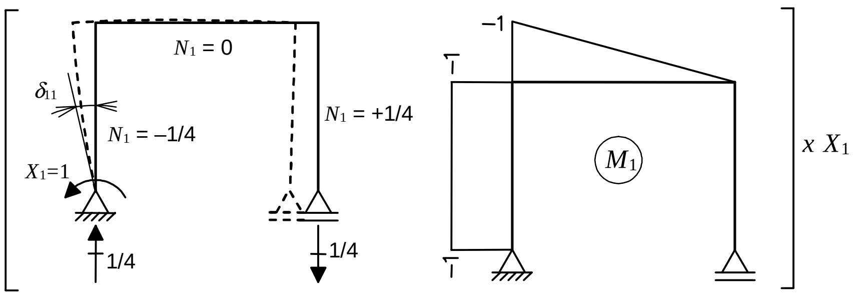
Sistema Principal e Hiperestático (g=1)



Caso (0) – Variação de temperatura isolada no SP



Caso (1) – X_1 isolado no SP



Equação de compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$\delta_{10} = \int_{estrutura} M_1 d\theta^T + \int_{estrutura} N_1 du^T$$

$$\delta_{11} = \int \frac{(M_1)^2}{EI} dx + \int \frac{(N_1)^2}{EA} dx$$

(considerando também deformação axial)

$$d\theta^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_e)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot (+20)}{0.50} dx = +\alpha \cdot 40 \cdot dx$$

$$du^T = \alpha \cdot \Delta T_{GC} \cdot dx = +\alpha \cdot 10 \cdot dx$$

$$\delta_{10} = \alpha \cdot 40 \cdot \int_{estrutura} M_1 dx + \alpha \cdot 10 \cdot \int_{estrutura} N_1 dx$$

$$\delta_{10} = \alpha \cdot 40 \cdot \left[(-1) \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 4 \right] + \alpha \cdot 10 \cdot \left[\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 3 + 0 \cdot 4 + \left(+\frac{1}{4}\right) \cdot 3 \right] = -200 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int (M_1)^2 dx + \frac{1}{EA} \int (N_1)^2 dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[(-1) \cdot (-1).3 + \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 4 \right] + \frac{1}{EA} \cdot \left[\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 3 + \left(+\frac{1}{4}\right) \cdot \left(+\frac{1}{4}\right) \cdot 3 \right]$$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0.20 \cdot 0.50^3}{12} = \frac{0.0125}{6} \text{ m}^4 \qquad A = b \cdot h = 0.10 \text{ m}^2 \qquad E = 10^8 \text{ kN/m}^2$$

$$\delta_{11} = +2.08375 \cdot 10^{-5} \text{ rad/kNm}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \rightarrow -200 \cdot 10^{-5} + 2.08375 \cdot 10^{-5} \cdot X_1 = 0 \quad \Rightarrow X_1 = +96.0 \text{ kNm}$$

Momentos fletores finais

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$$

(sendo $M_0 = 0$)