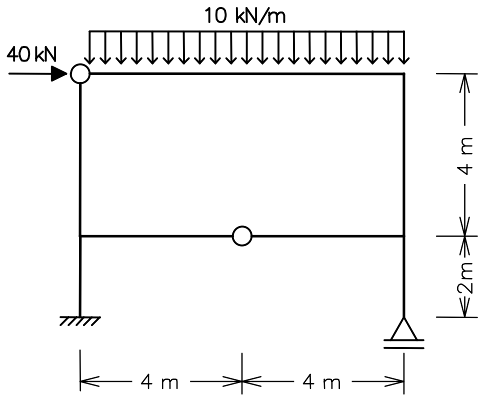
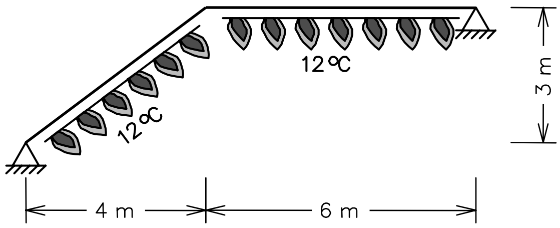
CIV 1127 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 2º Semestre – 2005

Primeira Prova – Data: 05/09/2005 – Duração: 2:30 hs – Sem Consulta

1ª Questão (5,5 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 10^5$ kNm².



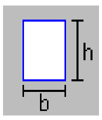
2ª Questão (3,5 pontos)
O pórtico ao lado sofreu um aquecimento na face inferior de 12 °C. Pede-se o diagrama de momentos fletores provocado por esta solicitação. Considere que as barras do pórtico podem se deformar axialmente, isto é, <u>não despreze a energia de deformação axial</u>.



Sabe-se:

(a) O material tem módulo de elasticidade $E = 10^8$ kN / m² e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}$ / °C.

(b) As barras da estrutura têm a seção transversal retangular indicada abaixo, que foi posicionada de modo a oferecer a maior resistência ao momento fletor atuante:



$h = 0.60$ m
$b = 0.20$ m

$\boxed{A = b \cdot h}$ $\boxed{I = \dfrac{b \cdot h^3}{12}}$

(c) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$du^T = \alpha \, \Delta T_{CG} \, dx$
sendo ΔT_{CG} a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

(d) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é

$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$

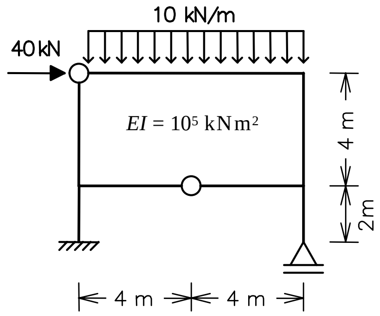
sendo ΔT_i a variação de temperatura das fibras inferiores da viga e ΔT_s a variação de temperatura das fibras superiores.

3ª Questão (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

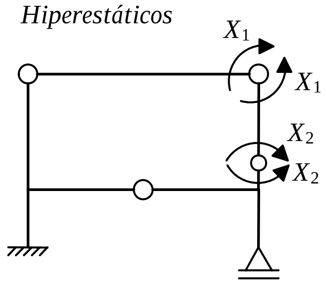
Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{bf - de}{ad - bc} \\ X_2 = \dfrac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

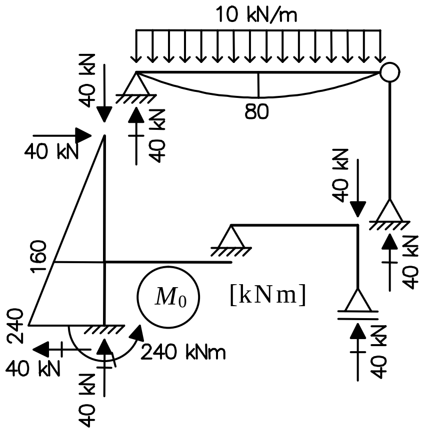
1ª Questão



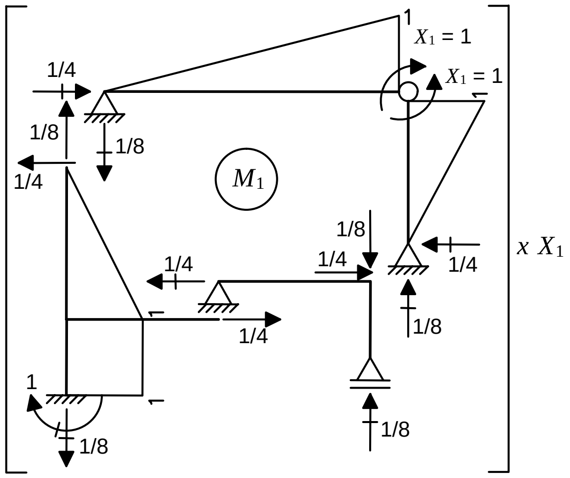
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos



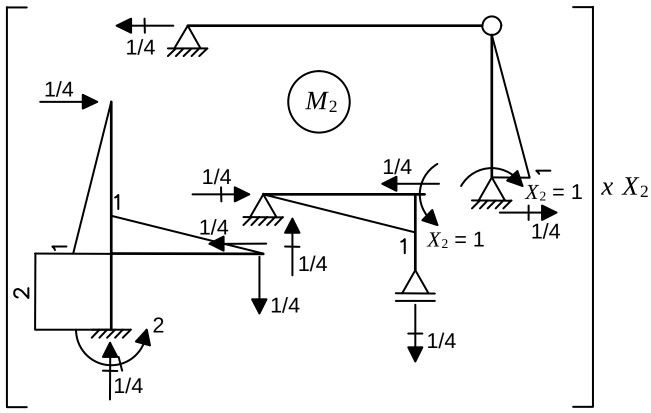
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3EI}\begin{Bmatrix} -2480 \\ +3040 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3EI}\begin{bmatrix} +22 & -14 \\ -14 & +40 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = +82.8 \text{ kNm} \\ X_2 = -47.0 \text{ kNm} \end{cases}$$

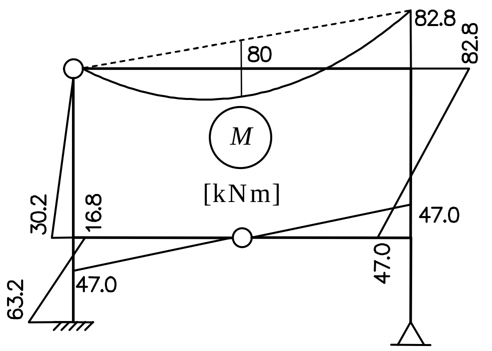
$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 80 \cdot 8 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 160 \cdot 4 \\ -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 160 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 240 \cdot 2 \end{bmatrix} = -\frac{2480}{3EI} \qquad \delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 160 \cdot 4 \\ +\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 160 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 240 \cdot 2 \end{bmatrix} = +\frac{3040}{3EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 8 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \right) + 1 \cdot 1 \cdot 2 \right] = +\frac{22}{3EI} \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \\ -1 \cdot 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = -\frac{14}{3EI}$$

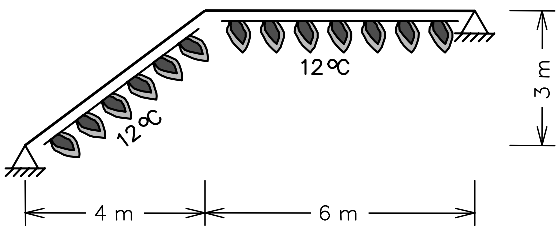
$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \right) + 2 \cdot 2 \cdot 2 \right] = +\frac{40}{3EI}$$

Momentos Fletores Finais:

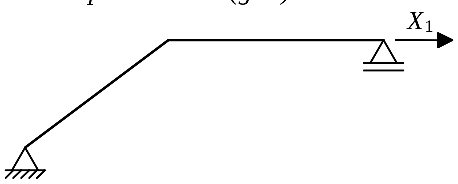
$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$



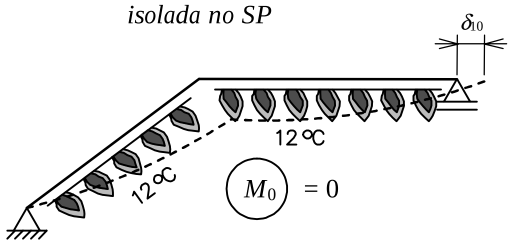
2ª Questão



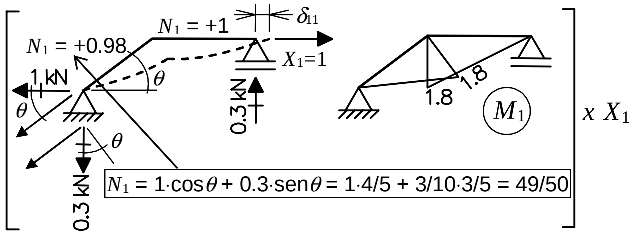
Sistema Principal e Hiperestático (g=1)



Caso (0) – Variação de temperatura isolada no SP



Caso (1) – X_1 isolado no SP



Equação de compatibilidade

$$\delta_{10}^{T} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$\delta_{10}^{T} = \int_{estrut.} M_1 d\theta^{T} + \int_{estrut.} N_1 du^{T}$$

$$\delta_{11} = \int_{estrut.} \frac{(M_1)^2}{EI} dx + \int_{estrut.} \frac{(N_1)^2}{EA} dx$$

(considerando também deformação axial)

$$d\theta^{T} = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot (+12)}{0.60} dx = +\alpha \cdot 20 \cdot dx$$

$$du^{T} = \alpha \cdot \Delta T_{GC} \cdot dx = +\alpha \cdot 6 \cdot dx$$

$$\delta_{10}^{T} = +\alpha \cdot 20 \cdot \int_{estrut.} M_1 dx + \alpha \cdot 6 \cdot \int_{estrut.} N_1 dx$$

$$\delta_{10}^{T} = +\alpha \cdot 20 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (+1.8) \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot (+1.8) \cdot 6 \right]$$
$$+ \alpha \cdot 6 \cdot [0.98 \cdot 5 + 1.00 \cdot 6] = +316.08 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_{estrut.} (M_1)^2 dx + \frac{1}{EA} \int_{estrut.} (N_1)^2 dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (+1.8) \cdot (+1.8) \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot (+1.8) \cdot (+1.8) \cdot 6 \right]$$
$$+ \frac{1}{EA} \cdot [(+0.98) \cdot (+0.98) \cdot 5 + (+1) \cdot (+1) \cdot 6]$$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0.20 \cdot 0.60^3}{12} = 0.0036 \text{ m}^4 \qquad A = b \cdot h = 0.12 \text{ m}^2 \qquad E = 10^8 \text{ kN/m}^2$$

$$\delta_{11} = +3.3 \cdot 10^{-5} + 0.09 \cdot 10^{-5} = +3.39 \cdot 10^{-5} \text{ m/kN}$$

$$\delta_{10}^{T} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \;\rightarrow +316.08 \cdot 10^{-5} + 3.39 \cdot 10^{-5} \cdot X_1 = 0 \quad \Rightarrow X_1 = -93.2 \text{ kN}$$

Momentos fletores finais

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$$

(sendo $M_0 = 0$)