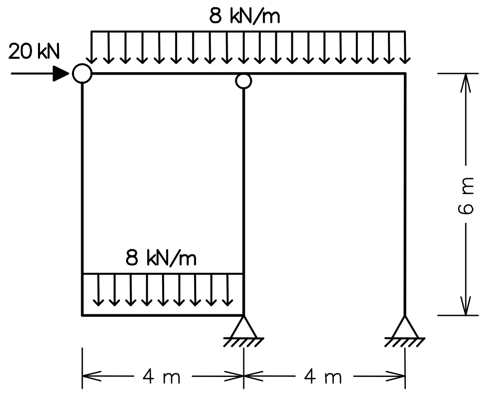
CIV 1127 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 2º Semestre – 2006

Primeira Prova – Data: 06/09/2006 – Duração: 2:30 hs – Sem Consulta

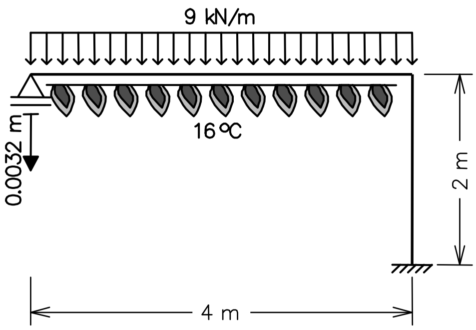
1ª Questão (5,5 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 10^5$ kNm².



2ª Questão (3,5 pontos)
Considere o pórtico mostrado abaixo sobre o qual atuam concomitantemente as seguintes solicitações:

- Carga uniformemente distribuída de 9 kN/m na viga (barra horizontal).
- Aquecimento das fibras inferiores da viga de $\Delta T_i = +16$ °C ao longo de toda a sua extensão (as fibras superiores não sofrem variação de temperatura, isto é, $\Delta T_s = 0$ °C).
- Recalque vertical (para baixo) de 3.2 mm (3.2 x 10^{-3} m) do apoio simples na esquerda.

Pede-se o diagrama de momentos fletores do pórtico utilizando o Método das Forças. Considere deformações por flexão e deformações axiais. Adote o Sistema Principal e o Hiperestático indicados na figura da direita.

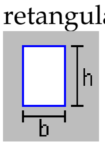


Sistema Principal (SP) e Hiperestático

Sabe-se:

(a) O material tem módulo de elasticidade $E = 10^7$ kN/m² e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}$ /°C.

(b) As barras da estrutura têm a seção transversal retangular indicada abaixo:



$h = 0.40$ m
$b = 0.15$ m

$\boxed{A = b \cdot h}$ $\boxed{I = \dfrac{b \cdot h^3}{12}}$

(c) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$du^T = \alpha \Delta T_{CG}\, dx$
sendo ΔT_{CG} a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

(d) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é

$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$

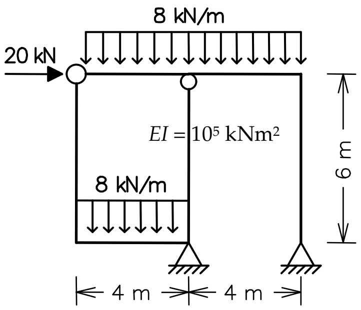
sendo ΔT_i a variação de temperatura das fibras inferiores da viga e ΔT_s a variação de temperatura das fibras superiores.

3ª Questão (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

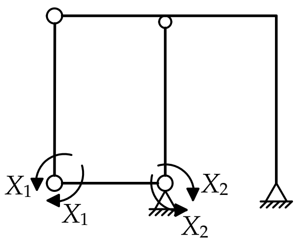
Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{bf - de}{ad - bc} \\[2ex] X_2 = \dfrac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

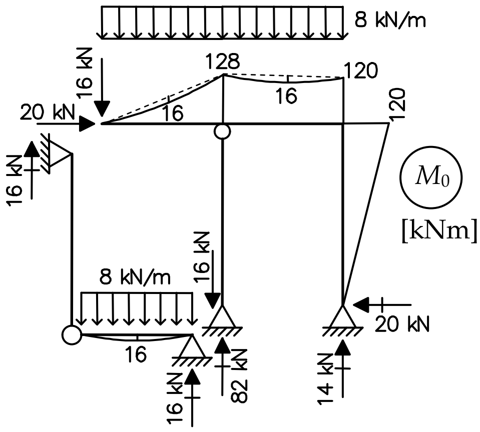
1ª Questão



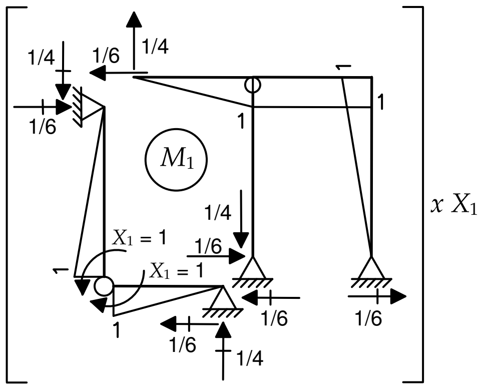
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos



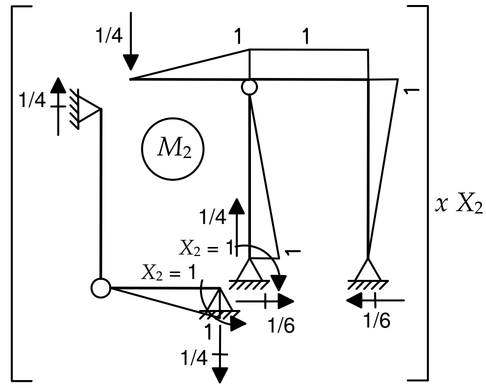
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -2464/3 \\ +864 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} +32/3 & -20/3 \\ -20/3 & +32/3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = +43.3 \text{ kNm} \\ X_2 = -53.9 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot1\cdot128\cdot4+\frac{1}{3}\cdot1\cdot16\cdot4-\frac{1}{2}\cdot1\cdot128\cdot4-\frac{1}{2}\cdot1\cdot120\cdot4+\frac{2}{3}\cdot1\cdot16\cdot4-\frac{1}{3}\cdot1\cdot120\cdot6+\frac{1}{3}\cdot1\cdot16\cdot4\right] = -\frac{2464}{3EI}$$

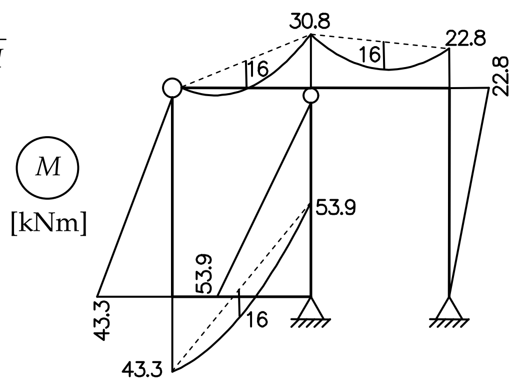
$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{3}\cdot1\cdot128\cdot4-\frac{1}{3}\cdot1\cdot16\cdot4+\frac{1}{2}\cdot1\cdot128\cdot4+\frac{1}{2}\cdot1\cdot120\cdot4-\frac{2}{3}\cdot1\cdot16\cdot4+\frac{1}{3}\cdot1\cdot120\cdot6+\frac{1}{3}\cdot1\cdot16\cdot4\right] = +\frac{864}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix} +2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot4\right)+1\cdot1\cdot4 \\ +2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot6\right) \end{bmatrix} = +\frac{32}{3EI} \qquad \delta_{22} = \frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix} +2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot4\right)+1\cdot1\cdot4 \\ +2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot6\right) \end{bmatrix} = +\frac{32}{3EI}$$

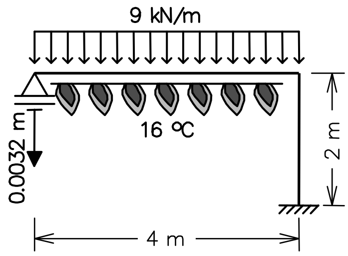
$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot4-1\cdot1\cdot4-\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot6+\frac{1}{6}\cdot1\cdot1\cdot4\right] = -\frac{20}{3EI}$$

Momentos Fletores Finais:

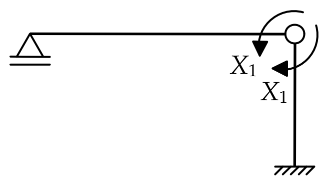
$$M = M_0 + M_1\cdot X_1 + M_2\cdot X_2$$



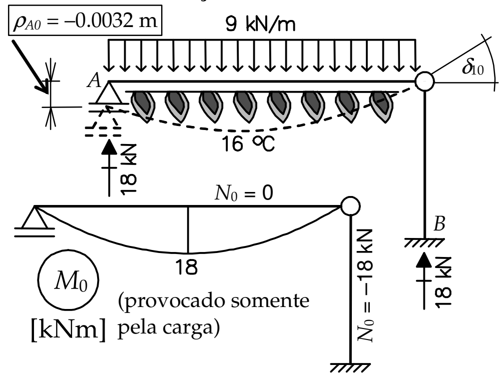
2ª Questão



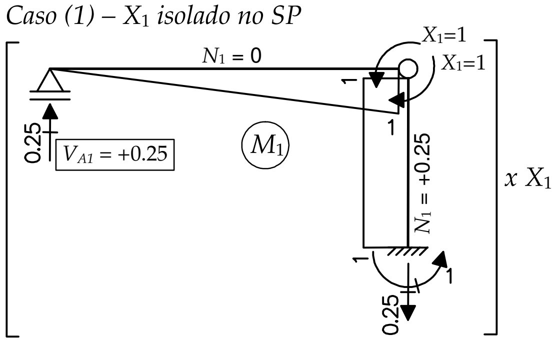
Sistema Principal e Hiperestático (g=1)



Caso (0) – Solicitações externas isoladas no SP



Caso (1) – X_1 isolado no SP



$$\delta_{11} = \int_{estrutura} \frac{(M_1)^2}{EI} dx + \int_{estrutura} \frac{(N_1)^2}{EA} dx$$

(considerando também deformação axial)

Equação de compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$\delta_{10} = \delta_{10}^q + \delta_{10}^\rho + \delta_{10}^T$$

$$\delta_{10}^q = \int_{estrutura} \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \int_{estrutura} \frac{N_1 N_0}{EA} dx$$

(considerando também deformação axial)

$$1 \cdot \delta_{10}^\rho + V_{A1} \cdot \rho_{A0} = 0 \;\Rightarrow\; \delta_{10}^\rho = -V_{A1} \cdot \rho_{A0}$$

$$\delta_{10}^T = \int_{viga} M_1 d\theta^T + \int_{viga} N_1 du^T$$

$$E = 10^7 \text{ kN/m}^2 \qquad \alpha = 10^{-5} / {}^\circ\text{C}$$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0.15 \cdot 0.40^3}{12} = 0.0008 \,\text{m}^4 \qquad A = b \cdot h = 0.15 \cdot 0.40 = 0.06 \,\text{m}^2$$

$$\delta_{10}^q = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (+1) \cdot (+18) \cdot 4\right] + \frac{1}{EA} \cdot \left[\left(+\frac{1}{4}\right) \cdot (-18) \cdot 2\right] = +298.5 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{10}^\rho = -V_{A1} \cdot \rho_{A0} = -[(+0.25) \cdot (-0.0032)] = +80 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$d\theta^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot (16)}{0.40} dx = +\alpha \cdot 40 \cdot dx$$

$$du^T = \alpha \cdot \Delta T_{GC} \cdot dx = +\alpha \cdot 8 \cdot dx$$

$$\delta_{10}^T = +\alpha \cdot 40 \cdot \int_{viga} M_1 dx + \alpha \cdot 8 \cdot \int_{viga} N_1 dx$$

$$\delta_{10}^T = +\alpha \cdot 40 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (+1) \cdot 4\right] + \alpha \cdot 8 \cdot [(0) \cdot 4] = +80 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{10} = \delta_{10}^q + \delta_{10}^\rho + \delta_{10}^T = +458.5 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (+1) \cdot (+1) \cdot 4 + (+1) \cdot (+1) \cdot 2\right] + \frac{1}{EA} \cdot [(+0.25) \cdot (+0.25) \cdot 2]$$

$$\delta_{11} = +41.6875 \cdot 10^{-5} \text{ rad/kNm}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \;\rightarrow +458.5 \cdot 10^{-5} + 41.6875 \cdot 10^{-5} \cdot X_1 = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = -11 \text{ kNm}$$

Momentos fletores finais

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$$