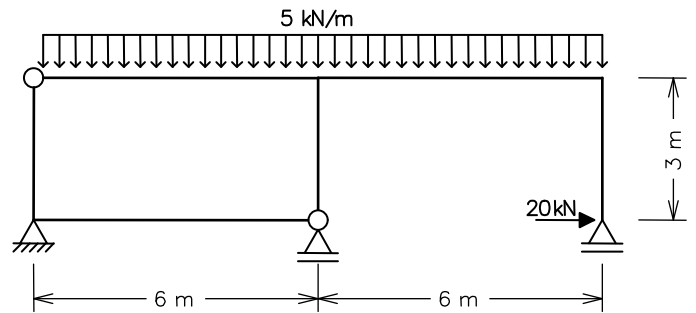


# CIV 1127 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2007

## Primeira Prova – Data: 04/04/2007 – Duração: 2:45 hs – Sem Consulta

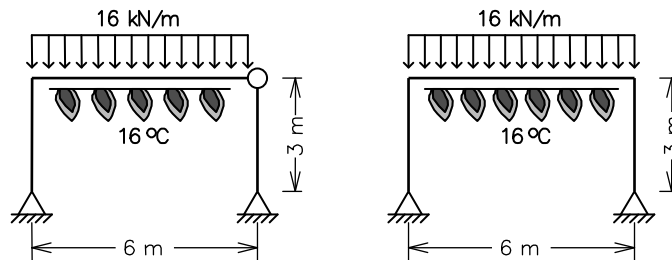
### 1ª Questão (5,5 pontos)

Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão  $EI = 10^5 \text{ kNm}^2$ .



### 2ª Questão (3,5 pontos)

Considere os dois pórticos mostrados abaixo. O pórtico do lado esquerdo é isostático e o do lado direito é hiperestático. As duas estruturas têm como solicitação o carregamento uniformemente distribuído indicado e um aumento de temperatura  $\Delta T_i = +16 \text{ }^\circ\text{C}$  nas fibras inferiores da viga. As fibras superiores da viga não sofrem variação de temperatura ( $\Delta T_s = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ ). As colunas (barras verticais) não sofrem nenhuma solicitação. Todas as barras têm um material com módulo de elasticidade  $E = 1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$  e coeficiente de dilatação térmica  $\alpha = 1 \times 10^{-5} /^\circ\text{C}$ . Todas as barras têm seções transversais com área  $A = 0.012 \text{ m}^2$ , momento de inércia  $I = 0.001 \text{ m}^4$ , altura  $h = 0.60 \text{ m}$  e centro de gravidade no meio de altura.



Pede-se:

- Determine o diagrama de momentos fletores da estrutura isostática. (0,5 ponto)
- Determine o diagrama de momentos fletores da estrutura hiperestática. Deve-se utilizar o Método das Forças, adotando obrigatoriamente como Sistema Principal a estrutura isostática da esquerda. Considere os efeitos de deformação axial no cálculo dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade. (1,5 pontos)
- Dê a interpretação física do termo de carga  $\delta_{10}$  do sistema de equações de compatibilidade do Método das Forças para esta solução. (0,5 ponto)
- Considere que as colunas (barras verticais) dos pórticos acima tiveram a seção transversal modificada para uma com momento de inércia  $I = 0.002 \text{ m}^4$  (a viga não se altera). Responda sem fazer nenhum cálculo:
  - O diagrama de momentos fletores da estrutura isostática se altera? Por que? (0,5 ponto)
  - O diagrama de momentos fletores da estrutura hiperestática se altera? Por que? (0,5 ponto)

Sabe-se:

- O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é

$$du^T = \alpha \Delta T_{CG} dx$$

sendo  $\Delta T_{CG}$  a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

- O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é

$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$

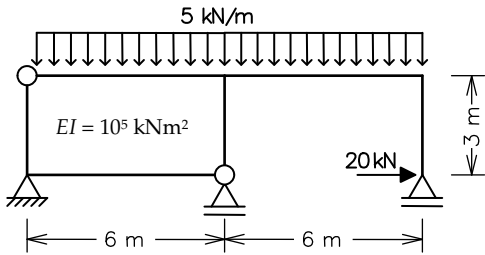
sendo  $\Delta T_i$  a variação de temperatura das fibras inferiores da viga e  $\Delta T_s$  a variação de temperatura das fibras superiores.

### 3ª Questão (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho $\times 0,1$ ).

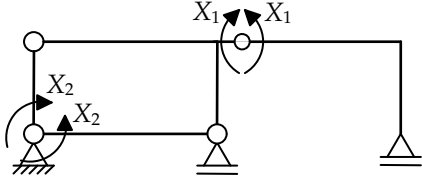
Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{bf - de}{ad - bc} \\ X_2 = \frac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

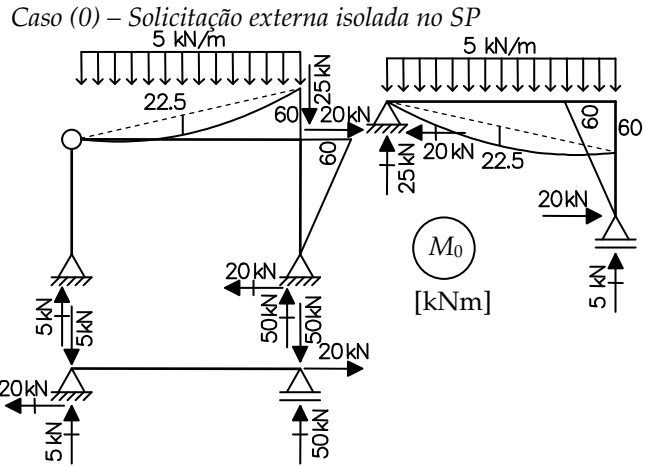
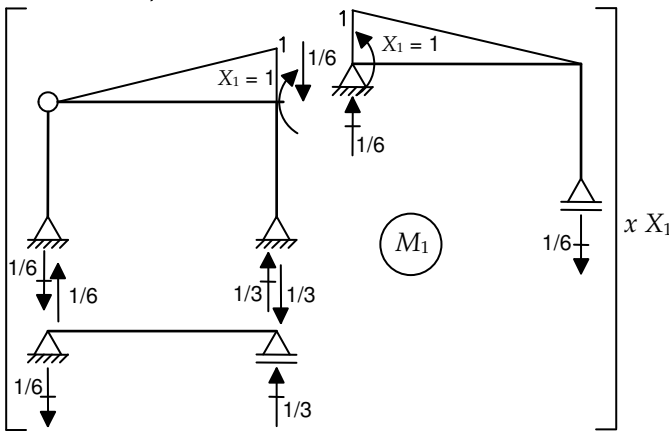
1ª Questão



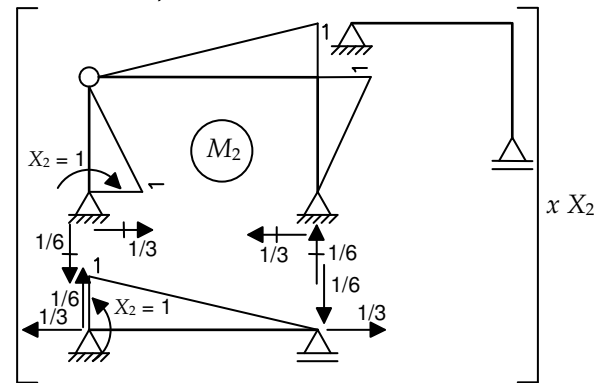
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos



Caso (1) – Hiperestático  $X_1$  isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático  $X_2$  isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -30 \\ +135 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} +4 & +2 \\ +2 & +6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = +22.5 \text{ kNm} \\ X_2 = -30.0 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ +\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 60 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 22.5 \cdot 6 - \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 60 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 22.5 \cdot 6 \right] = -\frac{30}{EI}$$

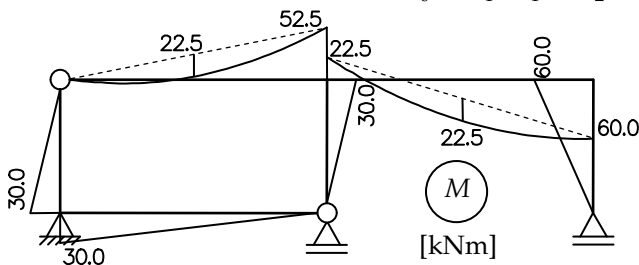
$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ +\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 60 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 22.5 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 60 \cdot 3 \right] = +\frac{135}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ +2 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \right) \right] = +\frac{4}{EI}$$

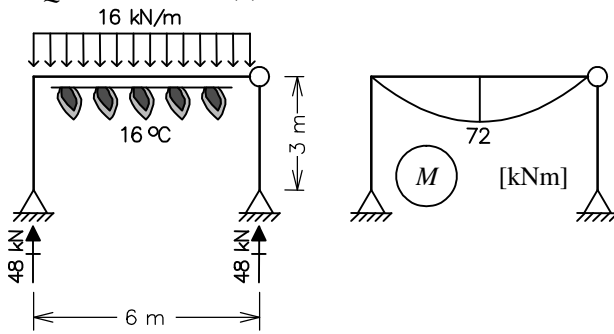
$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ +\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \right] = +\frac{2}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ +2 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \right) + 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \right) \right] = +\frac{6}{EI}$$

Momentos Fletores Finais:  $M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$



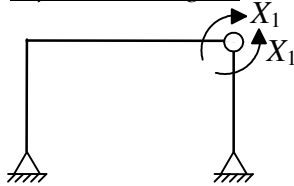
2ª Questão – Item (a)



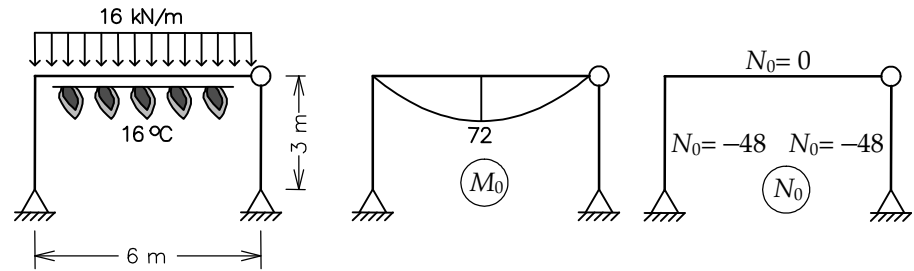
O diagrama de momentos fletores da estrutura isostática só depende do carregamento (cargas aplicadas) e de suas reações de apoio. Isto é, a variação de temperatura, embora deforme a estrutura isostática, não provoca esforços internos e reações de apoio.

2ª Questão – Item (b)

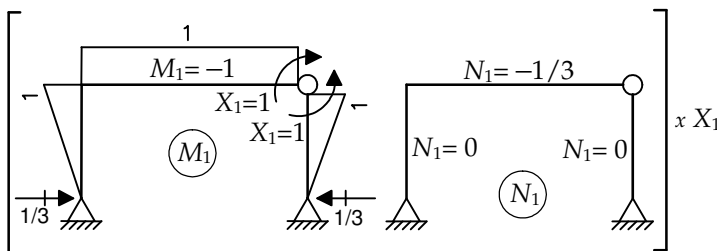
Sistema Principal e Hiperestático ( $g=1$ )



Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático  $X_1$  isolado no SP



Equação de compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

Sendo  $\delta_{10} = \delta_{10}^q + \delta_{10}^T$ :

$$\delta_{10}^q = \int_{\text{estrutura}} \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \int_{\text{estrutura}} \frac{N_1 N_0}{EA} dx$$

$$\delta_{10}^T = \int_{\text{viga}} M_1 d\theta^T + \int_{\text{viga}} N_1 du^T$$

$$\delta_{10}^q = \frac{1}{EI} \left[ \frac{2}{3} \cdot (-1) \cdot 72 \cdot 6 \right] + \frac{1}{EA} [0] = -288 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$d\theta^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot (16 - 0)}{0.60} dx = +\alpha \cdot \frac{80}{3} dx$$

$$du^T = \alpha \cdot \Delta T_{GC} \cdot dx = +\alpha \cdot 8 \cdot dx$$

$$\delta_{10}^T = \frac{\alpha \cdot 80}{3} \int_{\text{viga}} M_1 dx + \alpha \cdot 8 \int_{\text{viga}} N_1 dx$$

$$\delta_{10}^T = \frac{\alpha \cdot 80}{3} \cdot 6 \cdot (-1) + \alpha \cdot 8 \cdot 6 \cdot (-1/3) = -176 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{11} = \int_{\text{estrutura}} \frac{M_1 M_1}{EI} dx + \int_{\text{estrutura}} \frac{N_1 N_1}{EA} dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[ 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \right) + 1 \cdot 1 \cdot 6 \right] + \frac{1}{EA} \left[ \left( -\frac{1}{3} \right) \cdot \left( -\frac{1}{3} \right) \cdot 6 \right]$$

$$\delta_{11} = +8 \cdot 10^{-5} + \frac{1}{18} \cdot 10^{-5} = +\frac{145}{18} \cdot 10^{-5} \text{ rad/kNm}$$

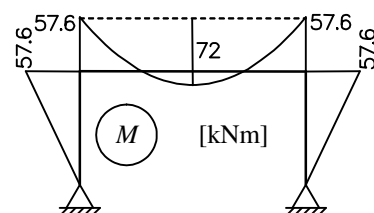
$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \rightarrow$$

$$(-288 - 176) \cdot 10^{-5} + \frac{145}{18} \cdot 10^{-5} \cdot X_1 = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = +57.6 \text{ kNm}$$

Momentos fletores finais

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$$



### 2ª Questão – Item (c)

$\delta_{10} = \delta_{10}^q + \delta_{10}^T \rightarrow$  rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula introduzida no SP provocada pelas solicitações externas no caso (0).

$\delta_{10}^q \rightarrow$  rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula introduzida no SP provocada pela carga distribuída da viga no caso (0).

$\delta_{10}^T \rightarrow$  rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula introduzida no SP provocada pela variação de temperatura da viga no caso (0).

### 2ª Questão – Item (d)

Item (d.1) – Na estrutura isostática, o diagrama de momentos fletores só depende do carregamento (cargas aplicadas) e de suas reações de apoio. Com a consideração da hipótese de pequenos deslocamentos, as equações de equilíbrio podem ser escritas para a geometria indeformada (original) da estrutura.

Portanto, o diagrama de momentos fletores não se altera com a modificação do momento de inércia da seção transversal das colunas.

No caso da carga uniformemente distribuída atuando na viga, a estrutura isostática terá sempre o diagrama de momentos fletores indicado no *item (a)* (diagrama parabólico na viga). Momentos fletores devidos à variação de temperatura isolada na estrutura isostática são sempre nulos.

Item (d.2) – Na estrutura hiperestática, por ter vínculos excedentes, os esforços internos dependem da rigidez relativa entre as barras. Com as colunas mais rígidas do que a viga, as rotações das extremidades da viga são menores do que no caso com todas as barras com mesma rigidez à flexão  $EI$ , se aproximando do caso de uma viga com extremidades engastadas.

Portanto, o diagrama de momentos fletores fica alterado com a modificação do momento de inércia da seção transversal das colunas.

A solução da estrutura hiperestática pelo Método das Forças mostrada no *item (b)* demonstra que os valores dos momentos fletores finais dependem dos valores relativos entre momentos de inércia das seções transversais das barras.