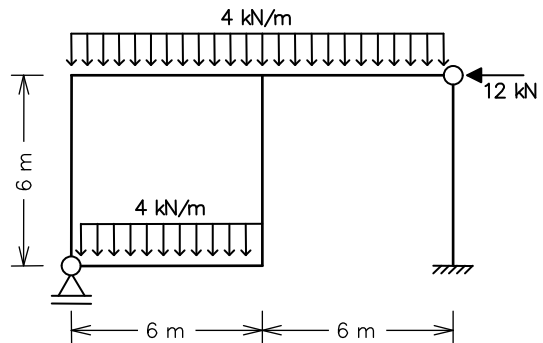


CIV 1127 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 2º Semestre – 2007

Primeira Prova – Data: 17/09/2007 – Duração: 2:30 hs – Sem Consulta

1ª Questão (5,5 pontos)

Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 4 \times 10^5 \text{ kNm}^2$.



2ª Questão (3,5 pontos)

Pede-se:

- Qual a utilidade do Princípio das Forças Virtuais (PFV): $\overline{W}_E = \overline{U}$? O que é \overline{W}_E ? O que é \overline{U} ? (0,5 ponto)
- Qual a expressão (fórmula matemática) genérica para \overline{U} ? (0,5 ponto)
- Quais são os três tipos de *deslocamentos relativos internos* para uma barra de um quadro plano? O que representam os *deslocamentos relativos internos*? (1,0 ponto)
- Uma variação de temperatura provoca deformações em uma estrutura isostática? (0,25 ponto)
- Uma variação de temperatura provoca esforços internos em uma estrutura isostática? (0,25 ponto)
- Uma variação de temperatura provoca esforços internos em uma estrutura hiperestática? (0,25 ponto)
- Um recalque de apoio provoca deformações em uma estrutura isostática? (0,25 ponto)
- Um recalque de apoio provoca esforços internos em uma estrutura isostática? (0,25 ponto)
- Um recalque de apoio provoca esforços internos em uma estrutura hiperestática? (0,25 ponto)

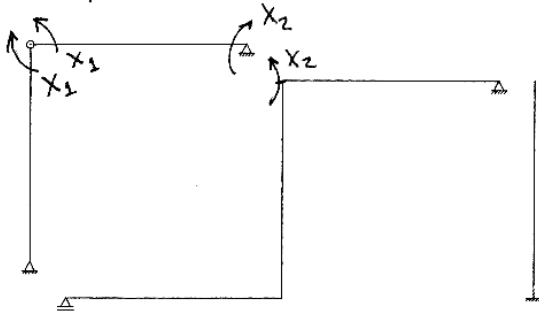
3ª Questão (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

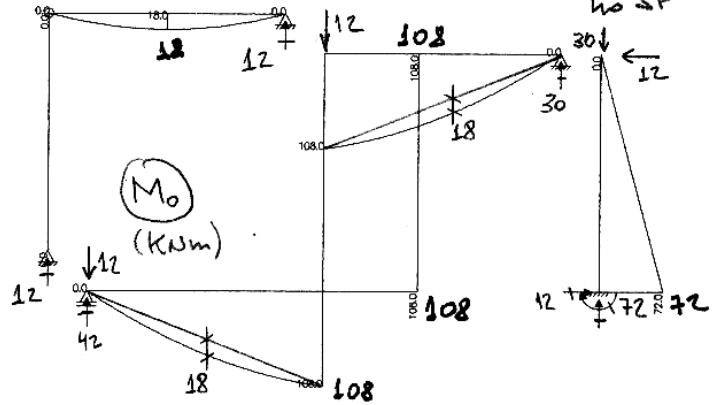
$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{bf - de}{ad - bc} \\ X_2 = \frac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

1ª Questão

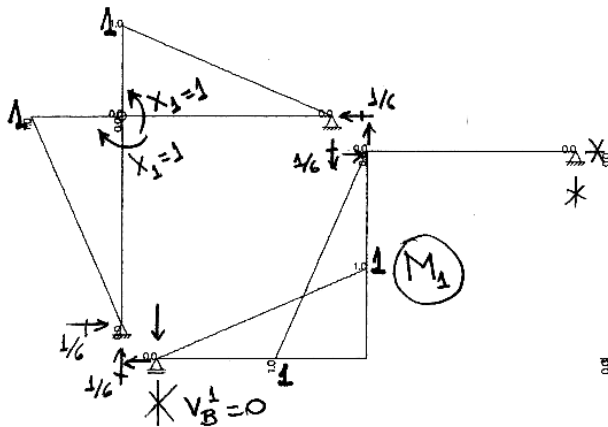
1ª Questão
Sistema Principal e
Hiperestáticos



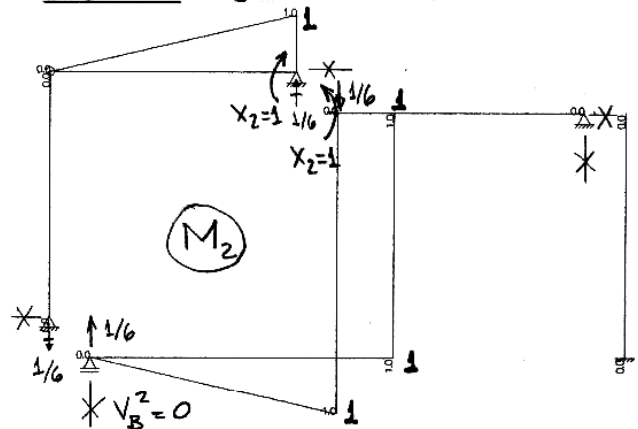
caso(0) - Solicitação externa isolada
no SP



caso (1) - X1 isolado no SP



caso(2) - X2 isolado no SP



Sistema de Eqs. de Compatibilidade

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases}$$

$$EI\delta_{10} = -\frac{1}{3} \times 6 \times 1 \times 18 - \frac{1}{3} \times 6 \times 1 \times 108 - \frac{1}{3} \times 6 \times 1 \times 18 - \frac{1}{2} \times 6 \times 1 \times 108 = -612$$

$$EI\delta_{20} = -\frac{1}{3} \times 6 \times 1 \times 18 + \frac{1}{3} \times 6 \times 1 \times 108 + \frac{1}{3} \times 6 \times 1 \times 18 + 6 \times 1 \times 108 = +864$$

$$EI\delta_{11} = 4 \times \left[\frac{1}{2} \times 6 \times 1 \times 1 \right] = 8$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \frac{1}{6} \times 6 \times 1 \times 1 - \frac{1}{2} \times 6 \times 1 \times 1 - \frac{1}{3} \times 6 \times 1 \times 1 = -4$$

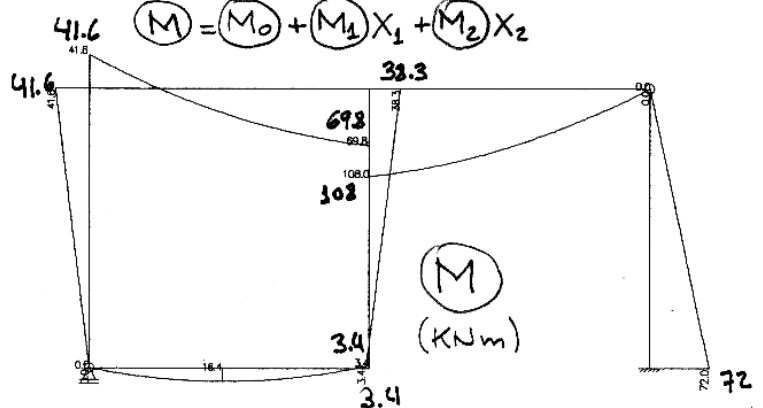
$$EI\delta_{22} = \frac{1}{3} \times 6 \times 1 \times 1 + 6 \times 1 \times 1 + \frac{1}{3} \times 6 \times 1 \times 1 = 10$$

$$\frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -612 \\ +864 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = 41,6 \text{ KNm} \\ X_2 = -69,8 \text{ KNm} \end{cases}$$

Momentos Fletores Finais

$$M = M_0 + M_1X_1 + M_2X_2$$



2ª Questão

(a) Qual a utilidade do Princípio das Forças Virtuais (PFV): $\overline{W}_E = \overline{U}$?

O PFV é uma das principais ferramentas para a *determinação de deslocamentos (ou rotações) em estruturas*. Esse princípio diz que:

- Dada uma configuração deformada real (D, d) e um sistema de forças ($\overline{F}, \overline{f}$) arbitrário (virtual) em equilíbrio, a igualdade $\overline{W}_E = \overline{U}$ estabelece uma condição de compatibilidade para a configuração deformada real.

O PFV utiliza um sistema auxiliar, chamado *sistema virtual*, que é completamente independente do *sistema real*, sendo este a estrutura da qual se quer calcular um deslocamento ou rotação (ou estabelecer uma condição de compatibilidade). O sistema virtual trabalha com a mesma estrutura, mas com cargas diferentes. As cargas do sistema virtual são compostas de uma força \overline{P} (ou momento) escolhida arbitrariamente (em geral unitária) na direção do deslocamento (ou rotação) que se deseja calcular e de suas correspondentes reações de apoio. As cargas do sistema virtual não existem na realidade (por isso, são ditas *virtuais*) e são meras abstrações para cálculo.

O que é \overline{W}_E ?

$\overline{W}_E = \sum \overline{F} \cdot D \rightarrow$ trabalho das forças externas virtuais \overline{F} com os correspondentes deslocamentos externos reais D . No caso em que não há recalque de apoio, $\overline{W}_E = \overline{P} \cdot \Delta$, sendo que:

$\Delta \rightarrow$ deslocamento (ou rotação) genérico a ser calculado no sistema real.

$\overline{P} \rightarrow$ carga virtual (força ou momento) genérica associada ao deslocamento (ou rotação) a ser calculado.

O que é \overline{U} ?

$\overline{U} = \int \overline{f} \cdot d \rightarrow$ energia de deformação interna virtual armazenada em uma estrutura, combinando os esforços internos virtuais \overline{f} com os correspondentes deslocamentos relativos internos reais d .

(b) Qual a expressão (fórmula matemática) genérica para \overline{U} ?

No caso de pórticos planos, a energia de deformação interna virtual pode ser desmembrada em parcelas que consideram os efeitos axial, de flexão e cortante:

$$\overline{U} = \int_{\text{estrutura}} \overline{N} \cdot du + \int_{\text{estrutura}} \overline{M} \cdot d\theta + \int_{\text{estrutura}} \overline{Q} \cdot dh$$

Sendo que:

$\overline{N} \rightarrow$ esforço normal no sistema virtual provocado por \overline{P} .

$\overline{M} \rightarrow$ momento fletor no sistema virtual provocado por \overline{P} .

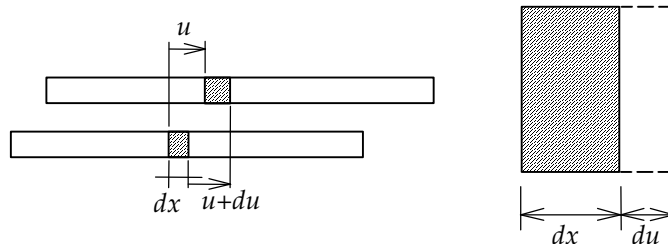
$\overline{Q} \rightarrow$ esforço cortante no sistema virtual provocado por \overline{P} .

(c) Quais são os três tipos de *deslocamentos relativos internos* para uma barra de um quadro plano? O que representam os *deslocamentos relativos internos*?

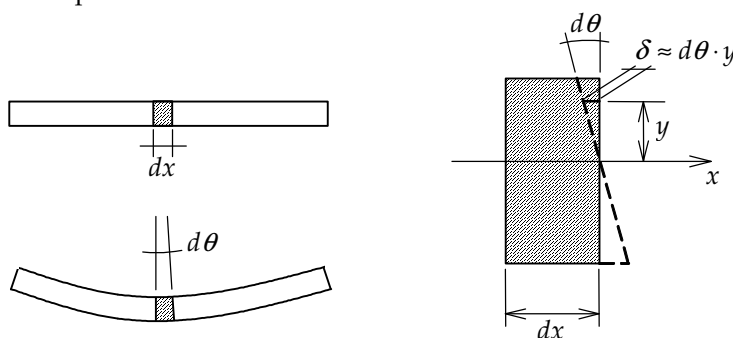
O modelo matemático (Teoria de Vigas de Navier acrescida do efeito de deformações axiais) adotado para o comportamento de barras permite que as deformações tenham representações integrais no nível de seção transversal. Os *deslocamentos relativos internos* representam as deformações elementares de um elemento infinitesimal de barra.

No caso de um quadro plano, os três tipos de *deslocamentos relativos internos* são:

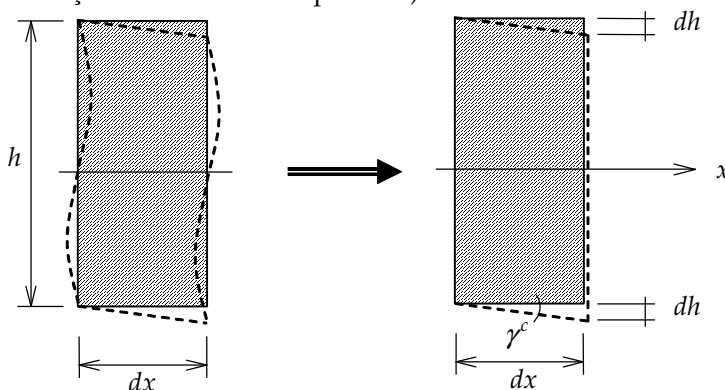
du → deslocamento axial relativo interno em um elemento infinitesimal de barra no sistema real:



$d\theta$ → rotação relativa interna por flexão em um elemento infinitesimal de barra no sistema real:



dh → deslocamento transversal relativo interno em um elemento infinitesimal de barra no sistema real (o efeito do empenamento da seção transversal é desprezado):



Entretanto, para barras usuais (com comprimento muito maior do que a altura h da seção transversal) as deflexões provocadas por efeitos cortantes são desprezadas na presença das deflexões provocadas por efeitos de flexão.

(d) Uma variação de temperatura provoca deformações em uma estrutura isostática?

Uma variação de temperatura provoca variações de comprimento ou encurvamentos (flexões) em qualquer tipo de barra, quer seja de uma estrutura isostática ou de uma estrutura hiperestática. Portanto uma variação de temperatura provoca deformações em uma estrutura isostática.

(e) Uma variação de temperatura provoca esforços internos em uma estrutura isostática?

Do ponto de vista físico, uma estrutura isostática tem o número exato de vínculos (externos e internos) para que tenha estabilidade. Retirando-se um destes vínculos, a estrutura se torna instável, e é definida como *hipostática*. Adicionando-se um vínculo qualquer a mais, este não seria o necessário para dar estabilidade à estrutura, e ela se torna hiperestática.

Pode-se observar que pequenas variações na geometria da estrutura isostática (mantendo-se válida a hipótese de pequenos deslocamentos), por não alterarem as equações de equilíbrio, não introduzem esforços adicionais.

Dessa forma, deformações provenientes de variações de temperatura provocam deslocamentos sem que apareçam esforços internos em estruturas isostáticas. Intuitivamente isto pode ser entendido se for observado que a estrutura isostática tem o número estrito de vínculos para impedir seus movimentos, não impedindo, por exemplo, uma pequena variação de comprimento ou o encurvamento (flexão) de uma barra devido a uma variação de temperatura.

(f) Uma variação de temperatura provoca esforços internos em uma estrutura hiperestática?

Uma variação de temperatura em membros de uma estrutura hiperestática pode induzir esforços que devem ser considerados pois, devido ao excesso de vínculos, a estrutura hiperestática oferece resistência às deformações provocadas pela variação de temperatura. Isto é, a estrutura hiperestática não se acomoda livremente aos possíveis encurvamentos (flexões) e variações de comprimento provocados pela variação de temperatura.

(g) Um recalque de apoio provoca deformações em uma estrutura isostática?

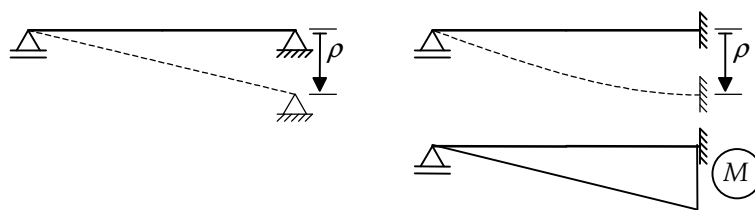
A diferença entre o efeito de uma variação de temperatura e um recalque de apoio em uma estrutura isostática é que o recalque de apoio não provoca deformações nas barras. Se um vínculo externo (apoio) de uma estrutura isostática sofrer um pequeno deslocamento (um recalque de apoio), a estrutura não oferece resistência a esse deslocamento imposto pois quando o apoio move a estrutura se transforma em um mecanismo (é hipostática sem o apoio). Isto é, o recalque de apoio só introduz movimentos de corpo rígido das barras da estrutura isostática, não causando deformações internas nas barras.

(h) Um recalque de apoio provoca esforços internos em uma estrutura isostática?

Como para um recalque de apoio as barras da estrutura isostática só sofrem movimentos de corpo rígido sem deformações (barras permanecem retas), não aparecerão esforços internos nas barras.

(i) Um recalque de apoio provoca esforços internos em uma estrutura hiperestática?

Assim como as variações de temperatura, os recalques de apoio em uma estrutura hiperestática podem induzir esforços internos que devem ser considerados. A estrutura hiperestática não se acomoda livremente (sem resistência) a recalques de apoio. Portanto, pode ocorrer o aparecimento de deformações em uma estrutura hiperestática induzidas por um recalque de apoio. A figura abaixo faz uma comparação entre o efeito de um recalque de apoio em uma viga isostática (na esquerda) e em uma viga hiperestática (na direita).



As vigas da figura sofrem um recalque vertical (ρ) no apoio da direita que pode ser considerado pequeno em relação ao comprimento da viga (o recalque está desenhado exageradamente fora de escala). Vê-se na figura da esquerda que a viga isostática não se deforma, tendo apenas um movimento de corpo rígido sem o aparecimento de esforços internos. Já a viga hiperestática na figura da direita tem deformações que induzem momentos fletores (e também esforços cortantes).