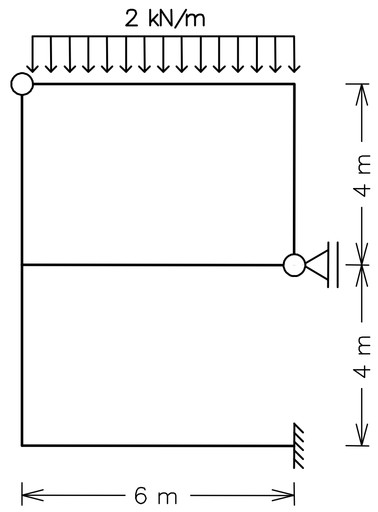
CIV 1127 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 2º Semestre – 2008

Primeira Prova – Data: 08/09/2008 – Duração: 2:45 hs – Sem Consulta

1ª Questão (5,5 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 10^5$ kNm².



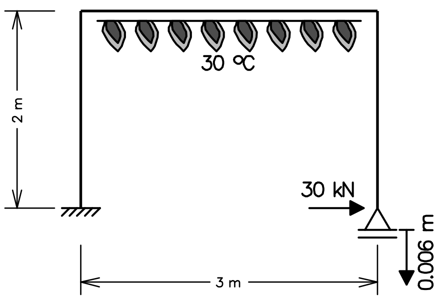
Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{bf - de}{ad - bc} \\ \\ X_2 = \dfrac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

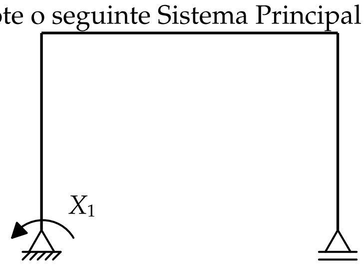
2ª Questão (3,5 pontos)
Para o pórtico plano mostrado abaixo pede-se o diagrama de momentos fletores utilizando o Método das Forças. O pórtico tem um material com módulo de elasticidade $E = 10^7$ kN/m² e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}$ /°C. As barras do pórtico têm uma seção transversal com área $A = 0.18$ m², momento de inércia $I = 0.0054$ m⁴, altura $h = 0.60$ m e centro de gravidade no meio de altura. As seguintes solicitações atuam no pórtico <u>concomitantemente</u>:

- Carga concentrada horizontal de 30 kN atuando no ponto do apoio da direita.
- Aquecimento da face inferior da viga do pórtico de $\Delta T_i = +30$ °C. A face superior da viga não sofre variação de temperatura, isto é, $\Delta T_s = 0$ °C. Os pilares não sobrem variação de temperatura.
- Recalque vertical (para baixo) de 6 mm (0.006 m) do apoio direito.

Considere que as barras do pórtico podem se deformar axialmente, isto é, <u>não despreze a energia de deformação axial</u>.



Adote o seguinte Sistema Principal e Hiperestático:



Sabe-se:

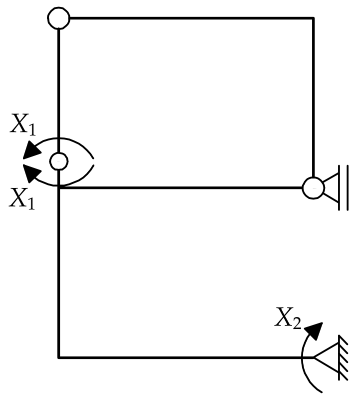
(i) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$du^T = \alpha \, \Delta T_{CG} \, dx$
sendo ΔT_{CG} a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

(ii) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx \,.$$

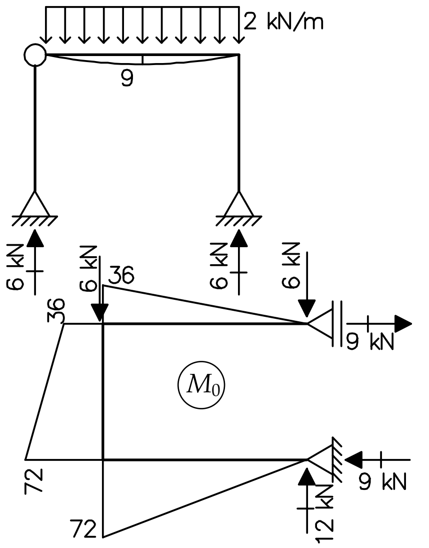
3ª Questão (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

1ª Questão

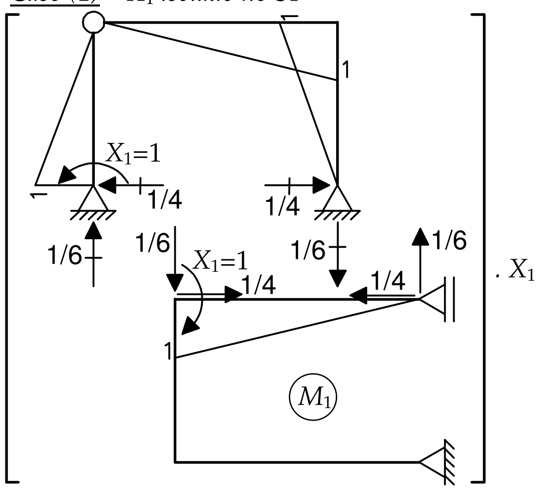
Sistema Principal e Hiperestáticos (g=2)



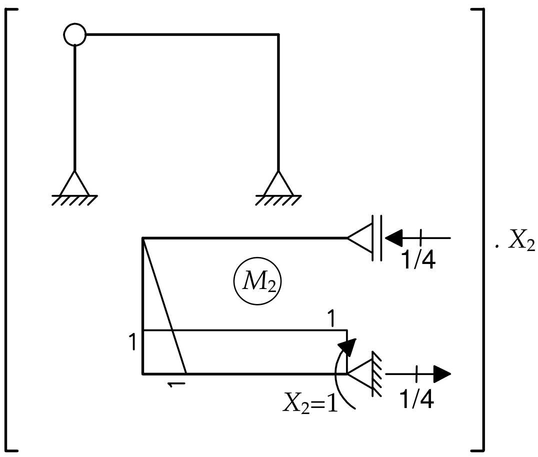
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – X_1 isolado no SP



Caso (2) – X_2 isolado no SP



Equações de Compatibilidade

$$\begin{Bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}X_1=+8.1\text{ kNm}\\ X_2=+45.8\text{ kNm}\end{cases}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 9\cdot 6-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 36\cdot 6\right]=-\frac{54}{EI}$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 72\cdot 4-\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 36\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 72\cdot 6\right]=-\frac{336}{EI}$$

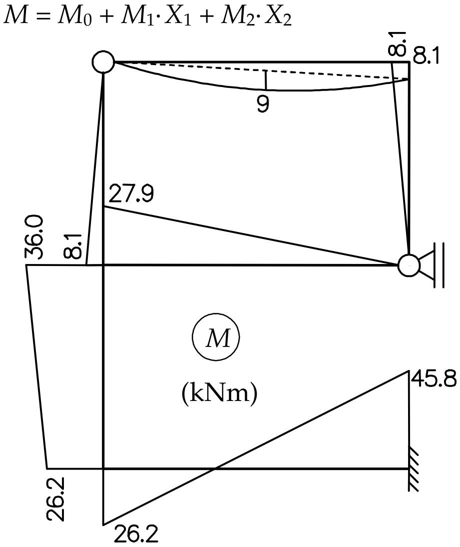
$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\left[2\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6+2\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 4\right]=+\frac{20}{3EI}$$

$$\delta_{21}=\delta_{12}=0$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\cdot\left[1\cdot 1\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 4\right]=+\frac{22}{3EI}$$

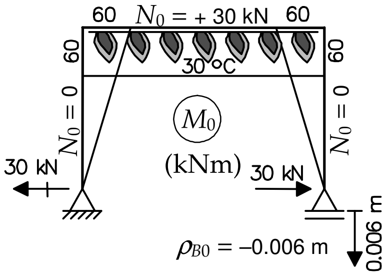
Diagrama de Momentos Fletores

$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$

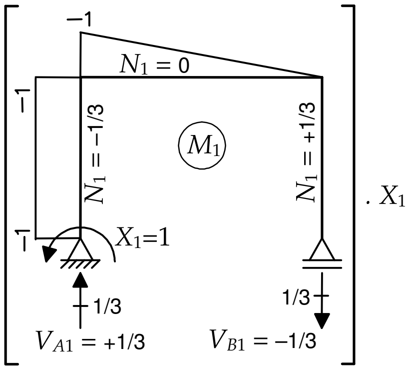


2ª Questão

<u>*Caso (0)*</u> *– Solicitação eterna isolada no SP*
Idêntico ao item (a).



<u>*Caso (1)*</u> *– X_1 isolado no SP*



Como o Sistema Principal é isostático, a variação de temperatura na viga e o "pequeno" recalque de apoio não provocam esforços internos. Portanto, os momentos fletores e os esfoços normais só são devidos à carga de 30 kN aplicada.

<u>*Equação de compatibilidade*</u>

$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$

δ_{10} é a rotação absoluta da seção do apoio da esquerda do Sistema Principal provocada pela carga concentrada, pela variação de temperatura e pelo recalque de apoio, atuando concomitantemente no *caso (0)*:

$\delta_{10} = \delta_{10}^P + \delta_{10}^T + \delta_{10}^\rho$

δ_{11} é a rotação absoluta da seção do apoio da esquerda do Sistema Principal provocada por $X_1 = 1$ no *caso (1)*:

$$\delta_{10}^P = \int\limits_{pórtico} \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \int\limits_{pórtico} \frac{N_1 N_0}{EA} dx$$

$$\delta_{10}^P = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 60 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 60 \cdot 2 \right] + \frac{1}{EA} \cdot [0]$$

$I = 0.0054\ \text{m}^4 \qquad A = 0.18\ \text{m}^2 \qquad E = 10^7\ \text{kN/m}^2$

$$\delta_{10}^P = -\frac{2500}{9} \cdot 10^{-5} \text{rad}$$

$$\delta_{10}^T = \int\limits_{viga} M_1 d\theta_0^T + \int\limits_{viga} N_1 du_0^T$$

$h = 0.60$ m

$$d\theta_0^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot (+30 - 0)}{0.60} dx = +\alpha \cdot 50 \cdot dx$$

$$du_0^T = \alpha \cdot \Delta T_{GC} \cdot dx = +\alpha \cdot 15 \cdot dx$$

$$\delta_{10}^T = \alpha \cdot 50 \cdot \int\limits_{viga} M_1 dx + \alpha \cdot 15 \cdot \int\limits_{viga} N_1 dx$$

$$\delta_{10}^T = \alpha \cdot 50 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 3 \right] + \alpha \cdot 15 \cdot [0]$$

$$\delta_{10}^T = -75 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$1 \cdot \delta_{10}^\rho + V_{B1} \cdot \rho_{B0} = 0 \;\Rightarrow\; \delta_{10}^\rho = -V_{B1} \cdot \rho_{B0}$$

$$\delta_{10}^\rho = -V_{B1} \cdot \rho_{B0} = -[(-1/3) \cdot (-0.006)] = -200 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{10} = \delta_{10}^P + \delta_{10}^T + \delta_{10}^\rho = -\frac{4975}{9} \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{11} = \int\limits_{pórtico} \frac{(M_1)^2}{EI} dx + \int\limits_{pórtico} \frac{(N_1)^2}{EA} dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \cdot 2 \right] + \frac{1}{EA} \cdot \left[\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 2 + \left(+\frac{1}{3}\right) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) \cdot 2 \right]$$

$$\delta_{11} = +\frac{452}{81} \cdot 10^{-5} \text{rad/kNm}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \;\Rightarrow\; X_1 = +99.1 \text{ kNm}$$

<u>*Momentos fletores finais*</u>

$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$