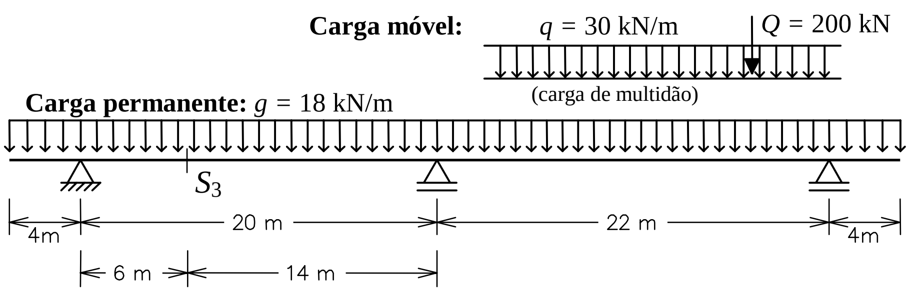
CIV 1127 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 2º Semestre – 2002

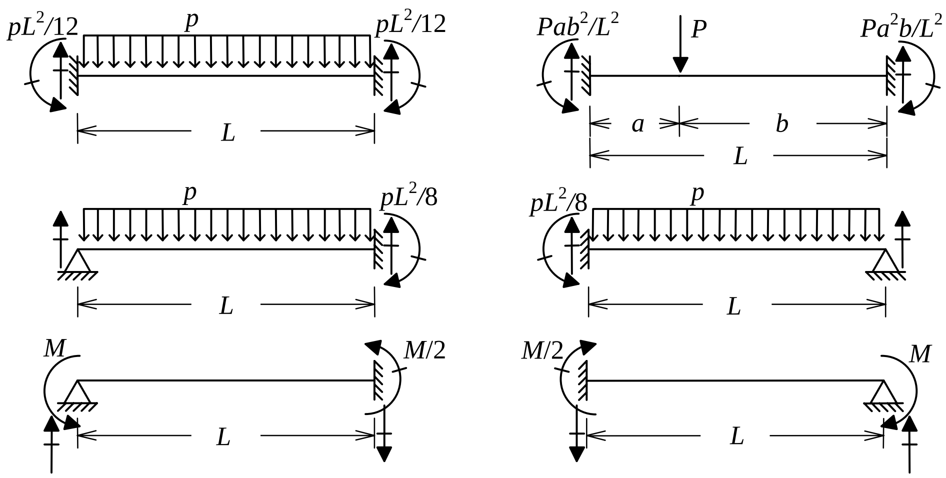
Terceira Prova – 25/11/2002 – Duração: 2:30 hs – Sem Consulta

1ª Questão (4,0 pontos)

Para uma viga de ponte, cujo modelo estrutural é apresentado abaixo, calcule os valores mínimo e máximo de momento fletor na seção S_3 devidos às cargas permanente e móvel indicadas. Sabe-se que o valor mínimo da linha de influência de momentos fletores na seção S_3 está localizado na extremidade esquerda da viga. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão EI.

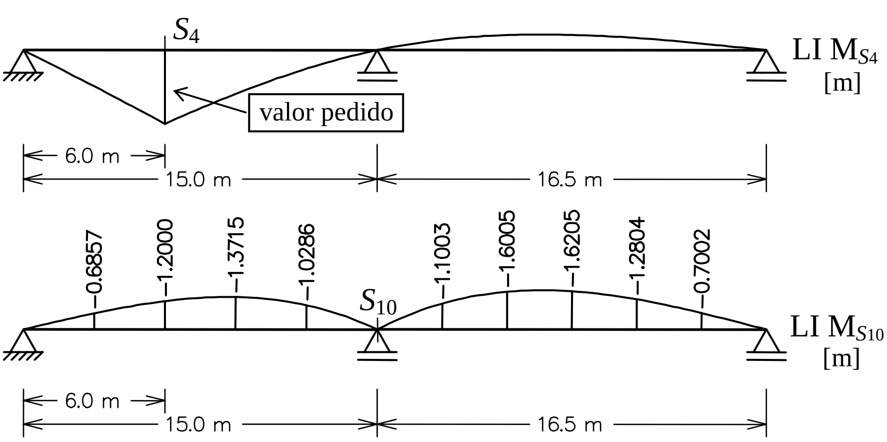


Formulário:



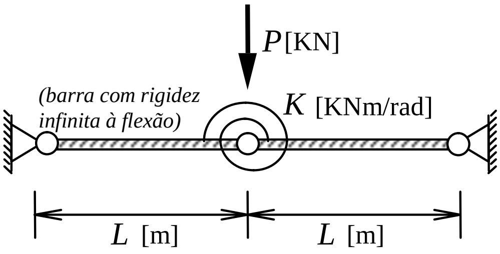
2ª Questão (1,5 pontos)

Abaixo estão mostradas as linhas de influência de momentos fletores nas seções S_4 e S_{10} de uma ponte. Calcule a ordenada da LI M_{S4} na seção que está indicada.



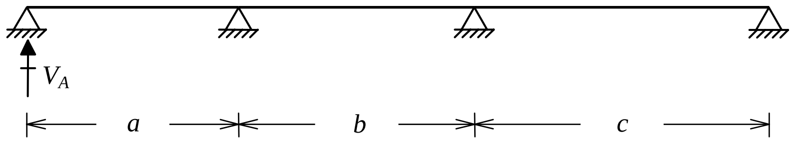
3ª Questão (1,5 pontos)

Considere a viga tri-articulada ao lado, onde as barras são infinitamente rígidas e existe uma mola rotacional ligando as duas barras na rótula central. Calcule o deslocamento vertical Δ do ponto central da viga em função de P (valor da carga), K (rigidez da mola) e L. A rigidez da mola representa a relação entre o momento fletor na mola e a rotação relativa entre suas extremidades. Considere que os deslocamentos são pequenos.



4ª Questão (1,0 ponto)

Enuncie o Princípio de Müller-Breslau (Método Cinemático) para o Traçado da Linha de Influência da reação de apoio V_A da viga mostrada abaixo. Demonstre este método pelo Princípio dos Deslocamentos Virtuais.

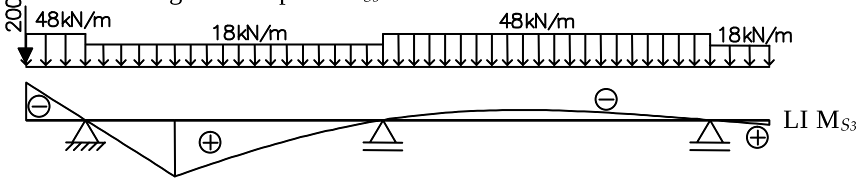


5ª Questão (2,0 pontos)

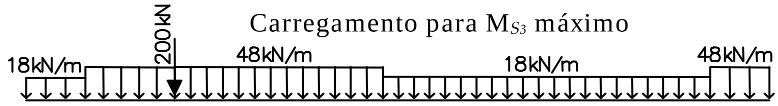
Grau vindo do segundo trabalho (nota do trabalho x 0,2).

1ª Questão

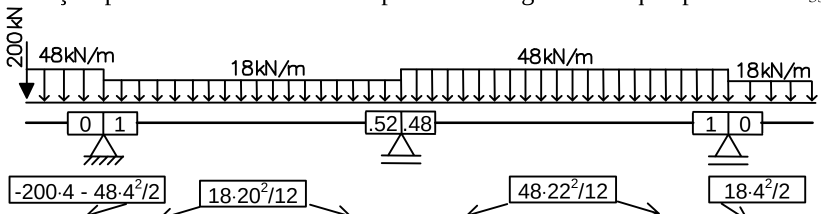
Carregamento para M_{S3} mínimo



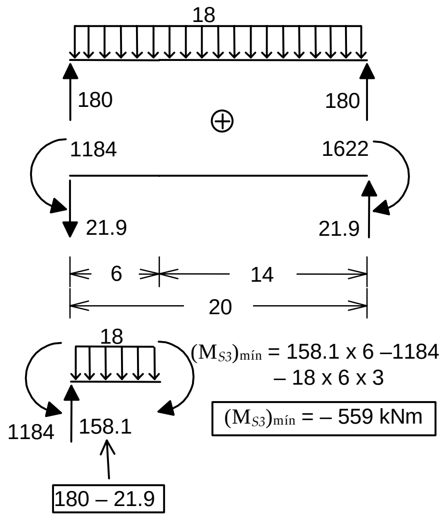
Carregamento para M_{S3} máximo



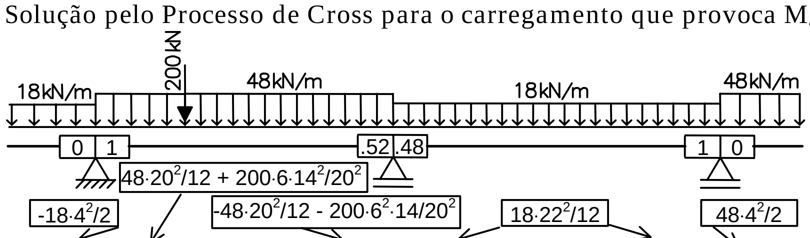
Solução pelo Processo de Cross para o carregamento que provoca M_{S3} mínimo:



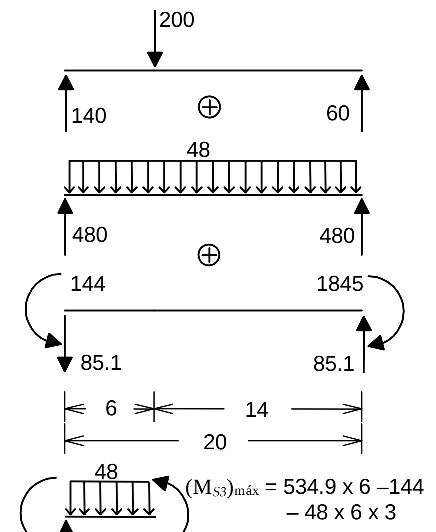
-1184	+600	-600	+1936	-1936	+144
			+896	+1792	
	-580	-1161	-1071	-535	
	+1164	+582			
	-151	-303	-279	-139	
			+337	+674	
	-87	-175	-162	-81	
	+238	+119			
	-31	-62	-57	-28	
			+54	+109	
	-14	-28	-26	-13	
	+45	+22			
	-5	-11	-11	-5	
			+9	+18	
	-2	-5	-4	-2	
	+7	+3			
	-1	-2	-1	0	
	+1	0	+1	+2	
	0	-1	0		
-1184	+1184	-1622	+1622	-144	+144



Solução pelo Processo de Cross para o carregamento que provoca M_{S3} máximo:

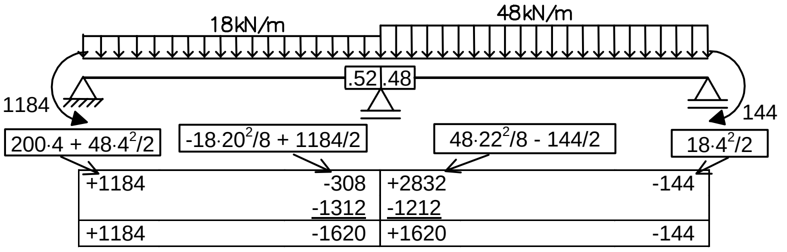


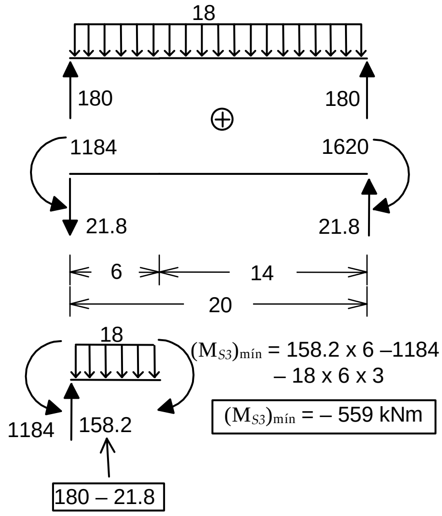
-144	+2188	-1852	+726	-726	+384
	-2044	-1022			
	+558	+1117	+1031	+515	
	-558	-279			
	+72	+145	+134	+67	
			-120	-240	
	+31	+62	+58	+29	
	-103	-51			
	+13	+27	+24	+12	
			-20	-41	
	+5	+10	+10	+5	
	-18	-9			
	+2	+5	+4	+2	
			-3	-7	
	+1	+2	+1	0	
	-3	-1			
	0	+1	0		
-144	+144	-1845	+1845	-384	+384



Solução alternativa eliminando os balanços e substituindo as suas cargas por momentos concentrados

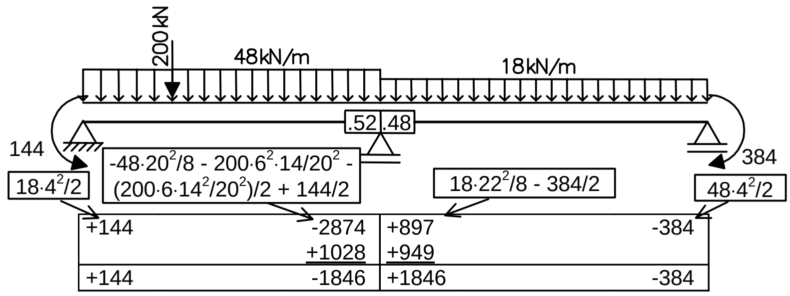
Solução pelo Processo de Cross para o carregamento que provoca M_{S3} mínimo:

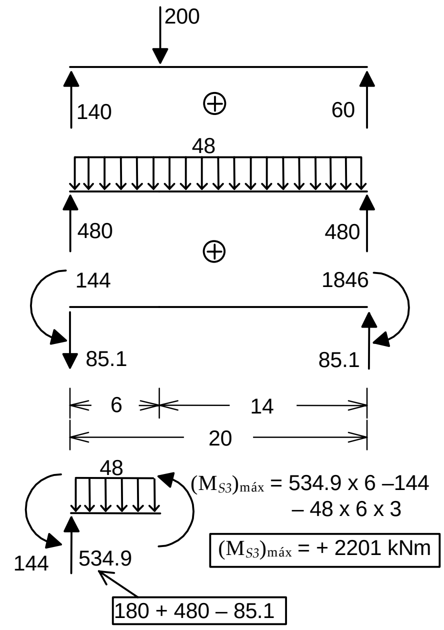




Observa-se que o valor final do momento fletor na seção do apoio central difere um pouco da solução anterior. Isto é devido às aproximações feitas nos passos do Processo de Cross.

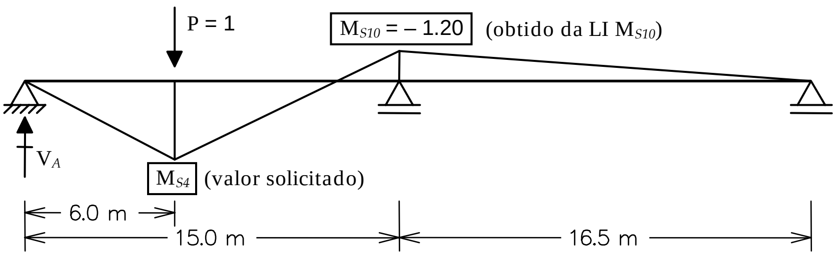
Solução pelo Processo de Cross para o carregamento que provoca M_{S3} máximo:





Observa-se que o valor final do momento fletor na seção do apoio central difere um pouco da solução anterior. Isto é devido às aproximações feitas nos passos do Processo de Cross.

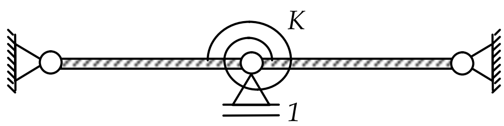
2ª Questão



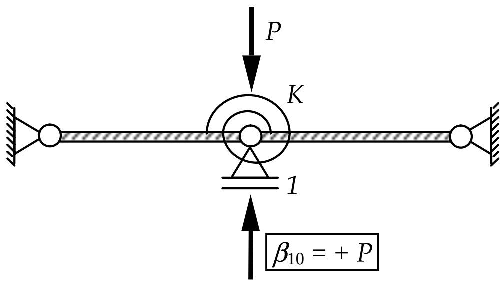
$M_{S10} = V_A \times 15 - 1 \times 9 = -1.20 \;\Rightarrow V_A = 0.52$

$\boxed{M_{S4} = V_A \times 6 \;\Rightarrow M_{S4} = +3.12 \;\Rightarrow \text{Ordenada solicitada} = +3.12\text{ m}}$

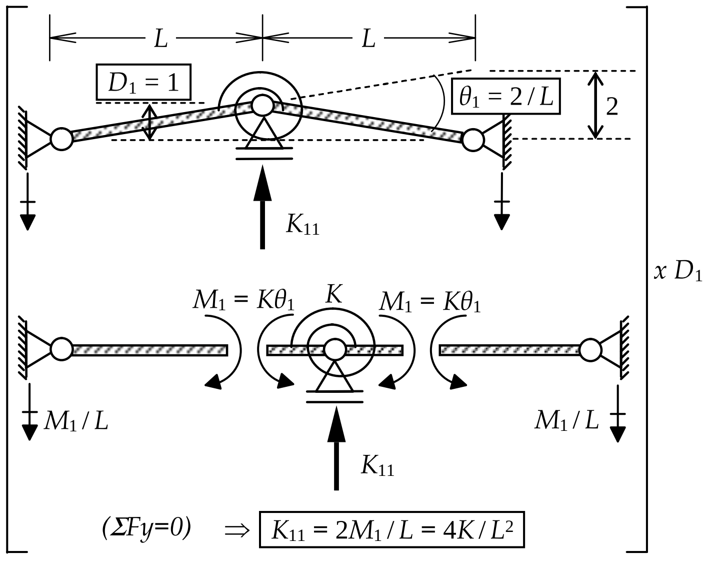
3ª Questão Sistema Hipergeométrico (*SH*)



caso (0) – Solicitação externa isolada no *SH*



caso (1) – Deslocabilidade D_1 isolada no *SH*



Equação de Equilíbrio

$\beta_{10} + K_{11}\,D_1 = 0$

$P + K_{11}\,\Delta = 0$

$\boxed{\Delta = -PL^2/4K}$

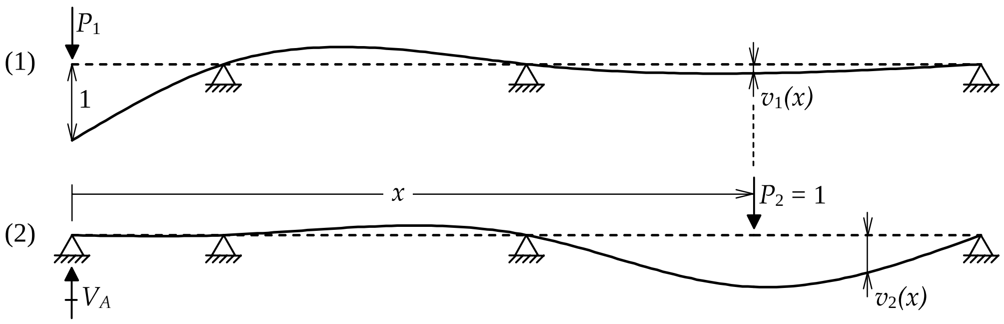
(para baixo)

4ª Questão

Princípio de Müller-Breslau (Método Cinemático) para o traçado da Linha de Influência da reação de apoio V_A:

Para se traçar a linha de influência da reação de apoio V_A, procede-se da seguinte forma – veja sistema (1) abaixo:

1. Rompe-se o apoio da esquerda, que é o vínculo associado à reação V_A.
2. Na seção do apoio, atribui-se à estrutura um deslocamento vertical unitário para baixo (no sentido oposto ao da reação V_A positiva), que será tratado como sendo muito pequeno.
3. A configuração deformada (elástica) obtida é a linha de influência da reação de apoio V_A.



A demonstração do Princípio de Müller-Breslau para estrutura acima pode ser feita utilizando-se o Teorema de Betti, que é uma conseqüência do Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV). Considere as duas vigas mostradas acima. Na viga (1) é aplicada uma carga concentrada P_1 que provoca, no seu ponto de aplicação, um deslocamento para baixo de uma unidade de distância. A viga (2), que é a viga original com o apoio da esquerda, tem uma carga concentrada unitária $P_2 = 1$, aplicada a uma distância x do início da viga.

O PDV é aplicado para as vigas (1) e (2), sendo que os campos de deslocamentos virtuais utilizados são os deslocamentos da outra viga, isto é, o campo de deslocamentos virtuais imposto à viga (1) é a elástica $v_2(x)$ da viga (2) e para a viga (2) é imposta a elástica $v_1(x)$ como campo de deslocamentos virtuais. Considerando um comportamento elástico-linear, as expressões do PDV para as duas vigas são:

$$\sum F_1 v_2 = \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx + \int \frac{Q_1 Q_2}{GA_c} dx \qquad\qquad \sum F_2 v_1 = \int \frac{M_2 M_1}{EI} dx + \int \frac{Q_2 Q_1}{GA_c} dx$$

Nestas expressões, o somatório do lado esquerdo do sinal de igualdade representa o trabalho virtual das forças externas, isto é, $\Sigma F_1 v_2$ é o trabalho das forças da viga (1) com os correspondentes deslocamentos externos da viga (2), e $\Sigma F_2 v_1$ é o inverso. As integrais do lado direito do sinal de igualdade representam a energia de deformação virtual interna. A primeira integral é a energia de deformação por flexão e a segunda é a energia de deformação por cisalhamento. M_1 e Q_1 são os diagramas de momento fletor e esforço cortante da viga (1), e M_2 e Q_2 são os diagramas da viga (2). O parâmetro E é o módulo de elasticidade do material, o parâmetro G é o módulo de cisalhamento, I é momento de inércia da seção transversal e A_c é a área efetiva para cisalhamento da seção transversal. Observa-se que as energias de deformação virtual interna das duas expressões são iguais. Portanto:

$$\sum F_1 v_2 = \sum F_2 v_1 \; .$$

Esta é a expressão do Teorema de Betti, que só é válido para estruturas elásticas-lineares: *o trabalho da forças externas de uma estrutura com os correspondentes deslocamentos externos de outra estrutura é igual ao trabalho das forças externas da outra estrutura com os correspondentes deslocamentos da primeira.*

Aplicando o Teorema de Betti para as vigas (1) e (2), tem-se:

$$P_1 \cdot 0 = -V_A \cdot 1 + P_2 \cdot v_1(x) \Rightarrow V_A(x) = v_1(x) \;\therefore\; \text{LI}V_A = v_1(x).$$

Como a elástica $v_1(x)$ da viga (1) corresponde justamente à imposição de um deslocamento unitário na direção oposta à reação de apoio V_A (com a liberação do vínculo associado), fica demonstrado que o Princípio de Müller-Breslau para a determinação da linha de influência de uma reação de apoio. Demonstrações análogas poderiam ser feitas para linhas de influência de esforço cortante e momento fletor, ou mesmo para outros tipos de estruturas, como pórticos.