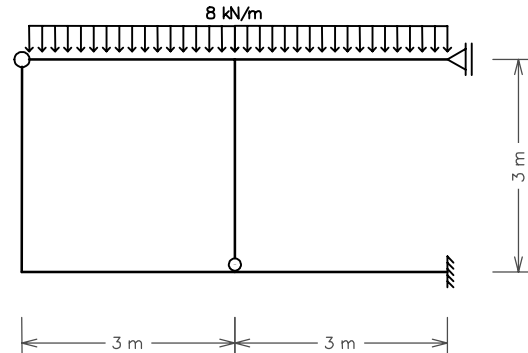


# CIV 1127 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2004

## Prova Final – 05/07/2004 – Duração: 2:45 hs – Sem Consulta

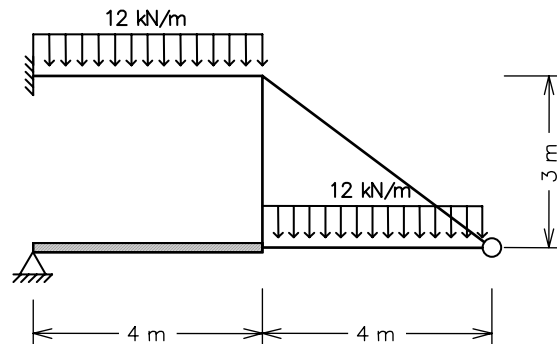
### 1ª Questão (4,5 pontos)

Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão  $EI = 4,0 \times 10^4 \text{ kNm}^2$ .



### 2ª Questão (4,5 pontos)

Pelo Método dos Deslocamentos, obter o diagrama de momentos fletores para o quadro ao lado (barras inextensíveis). Todas as barras têm a mesma inércia à flexão  $EI = 9,6 \times 10^4 \text{ kNm}^2$ , com exceção da barra horizontal inferior da esquerda que é infinitamente rígida.

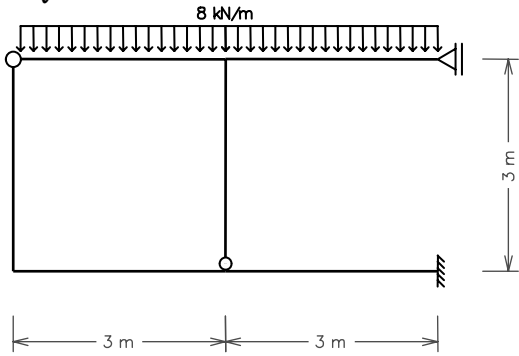


### 3ª Questão (1,0 ponto)

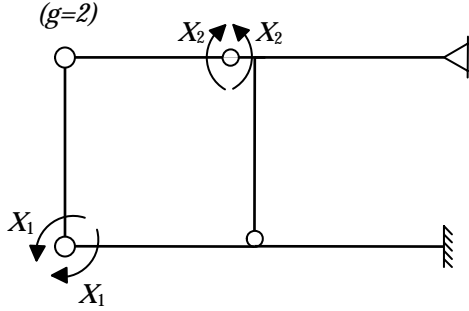
Faça uma comparação conceitual entre o Método das Forças e o Método dos Deslocamentos. Esta comparação deve abordar, pelo menos, os seguintes pontos para cada método:

- Idéia básica.
- Metodologia.
- Tipos de incógnitas.
- Número de incógnitas.
- Tipo de estrutura auxiliar utilizada nas soluções básicas.
- Imposições feitas pelas equações finais.
- Interpretação física dos termos de carga das equações finais.
- Interpretação física dos coeficientes das equações finais.

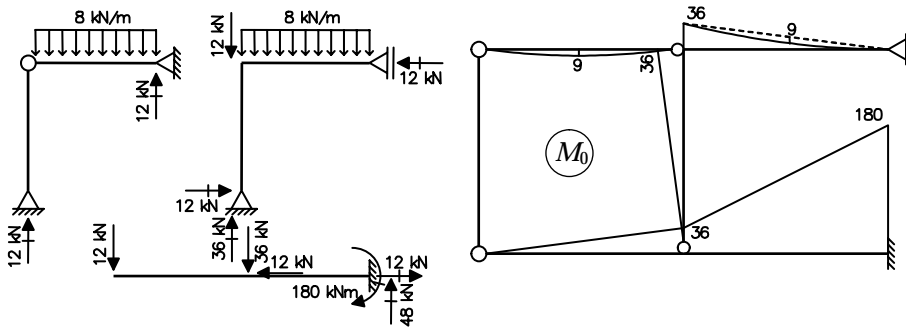
**1ª Questão**



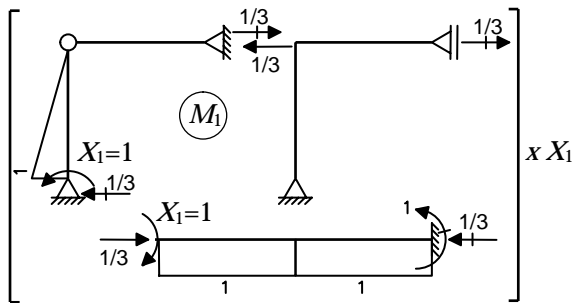
Sistema Principal e Hiperestáticos



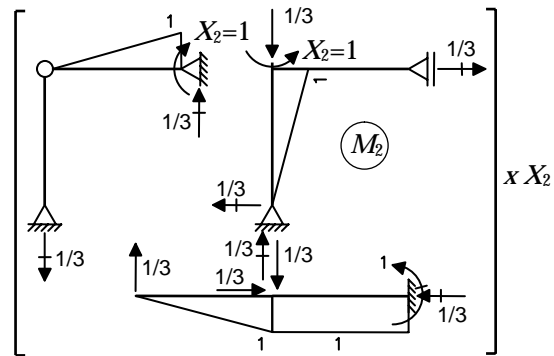
Caso (0) - Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) - X1 isolado no SP



Caso (2) - X2 isolado no SP



Equações de Compatibilidade

$$\begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = +20.5 \text{ kNm} \\ X_2 = +52.1 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 36 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 36 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 180 \cdot 3 \right] = -\frac{378}{EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ -\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 9 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 36 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 36 \cdot 3 \right] = -\frac{405}{EI}$$

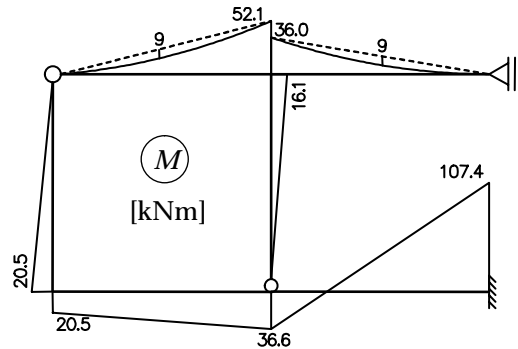
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 3 \right] = +\frac{7}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 3 \right] = +\frac{9}{2EI}$$

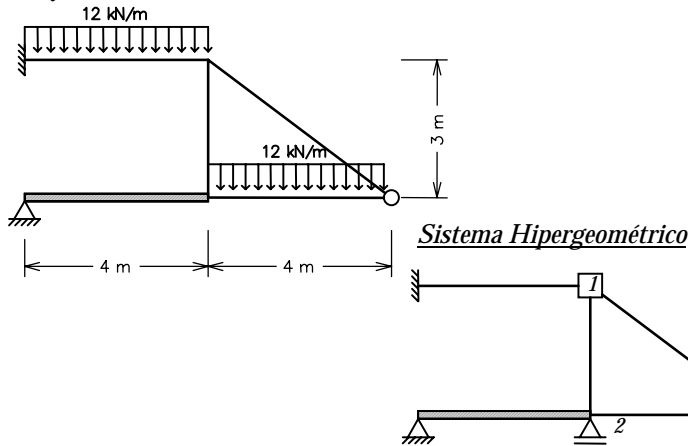
$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 3 \right] = +\frac{6}{EI}$$

Momentos fletores finais:

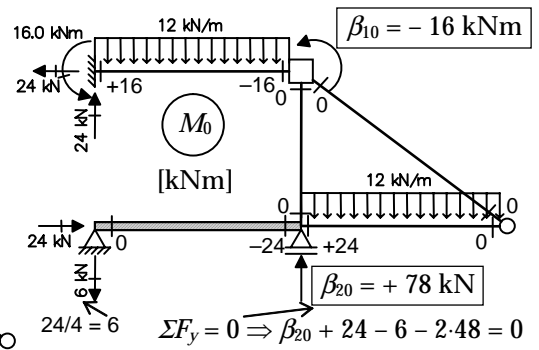
$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$$



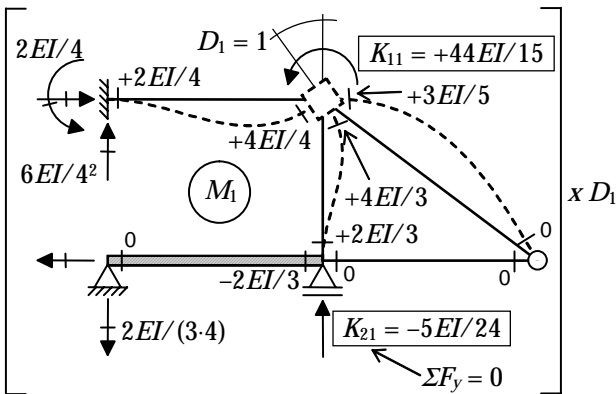
**2ª Questão**



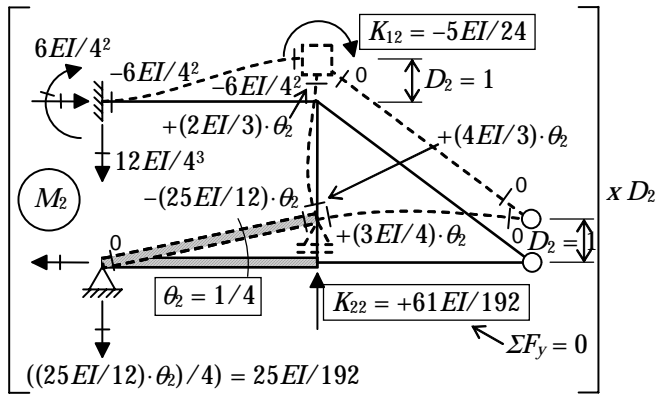
**Caso (0) – Solicitação externa isolada no SH**



**Caso (1) – Deslocabilidade  $D_1$  isolada no SH**



**Caso (2) – Deslocabilidade  $D_2$  isolada no SH**

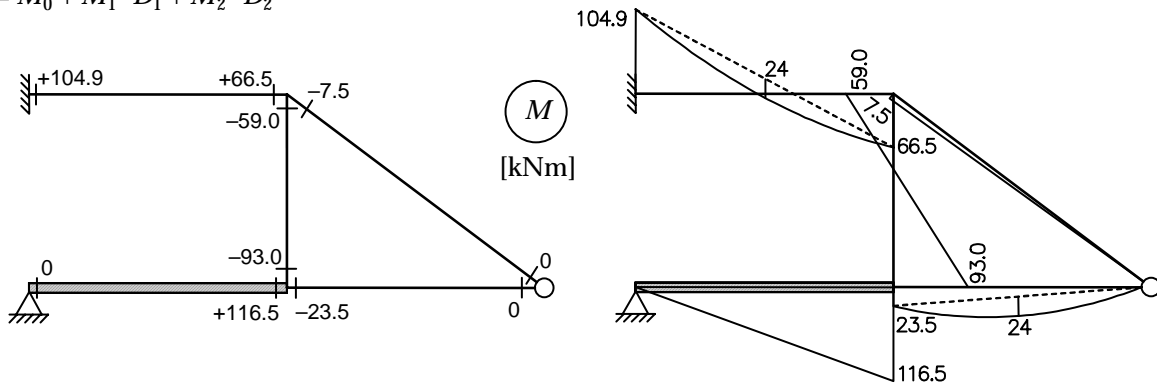


**Equações de equilíbrio:**

$$\begin{cases} \beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 = 0 \\ \beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} -16 \\ +78 \end{bmatrix} + EI \cdot \begin{bmatrix} +44/15 & -5/24 \\ -5/24 & +61/192 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = -\frac{12.57}{EI} \\ D_2 = -\frac{253.73}{EI} \end{cases}$$

**Momentos fletores finais:**

$$M = M_0 + M_1 \cdot D_1 + M_2 \cdot D_2$$



### 3ª Questão

#### Método das Forças

*Idéia básica:*

Determinar, dentro do conjunto de soluções em forças que satisfazem as condições de equilíbrio, qual a solução que faz com que as condições de compatibilidade também fiquem satisfeitas.

*Metodologia:*

Superpor uma série de soluções estaticamente determinadas (isostáticas) que satisfazem as condições de equilíbrio da estrutura para obter uma solução final que também satisfaz as condições de compatibilidade.

*Tipos de incógnitas:*

Hiperestáticos: forças e momentos associados a vínculos excedentes à determinação estática da estrutura.

*Número de incógnitas:*

É o número de incógnitas excedentes das equações de equilíbrio, denominado grau de hiperestaticidade.

*Tipo de estrutura auxiliar utilizada nas soluções básicas:*

Sistema Principal (SP): estrutura estaticamente determinada (isostática) obtida da estrutura original pela eliminação dos vínculos excedentes associados aos hiperestáticos. Essa estrutura auxiliar viola condições de compatibilidade da estrutura original.

*Imposições feitas pelas equações finais:*

São equações de compatibilidade expressas em termos dos hiperestáticos. Essas equações recompõem as condições de compatibilidade violadas nas soluções básicas.

*Interpretação física dos termos de carga das equações finais:*

Deslocamentos e rotações nos pontos dos vínculos liberados no SP devidos à sollicitação externa (carregamento).

*Interpretação física dos coeficientes das equações finais:*

Coefficientes de flexibilidade: deslocamentos e rotações nos pontos dos vínculos liberados no SP devidos a hiperestáticos com valores unitários atuando isoladamente.

#### Método dos Deslocamentos

*Idéia básica:*

Determinar, dentro do conjunto de soluções em deslocamentos que satisfazem as condições de compatibilidade, qual a solução que faz com que as condições de equilíbrio também fiquem satisfeitas.

*Metodologia:*

Superpor uma série de soluções cinematicamente determinadas (configurações deformadas conhecidas) que satisfazem as condições de compatibilidade da estrutura para obter uma solução final que também satisfaz as condições de equilíbrio.

*Tipos de incógnitas:*

Deslocabilidades: componentes de deslocamentos e rotações nodais que definem a configuração deformada da estrutura.

*Número de incógnitas:*

É o número de incógnitas excedentes das equações de compatibilidade, denominado grau de hipergeometria.

*Tipo de estrutura auxiliar utilizada nas soluções básicas:*

Sistema Hipergeométrico (SH): estrutura cinematicamente determinada (estrutura com configuração deformada conhecida) obtida da estrutura original pela adição dos vínculos necessários para impedir as deslocabilidades. Essa estrutura auxiliar viola condições de equilíbrio da estrutura original.

*Imposições feitas pelas equações finais:*

São equações de equilíbrio expressas em termos das deslocabilidades. Essas equações recompõem as condições de equilíbrio violadas nas soluções básicas.

*Interpretação física dos termos de carga das equações finais:*

Forças e momentos (reações) nos vínculos adicionados no SH devidos à sollicitação externa (carregamento)

*Interpretação física dos coeficientes das equações finais:*

Coefficientes de rigidez: forças e momentos nos vínculos adicionados no SH para impor configurações deformadas com deslocabilidades isoladas com valores unitários.