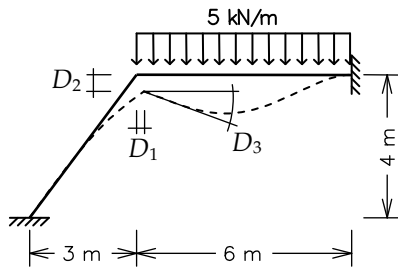


### Exemplo de solução pelo Método dos Deslocamentos



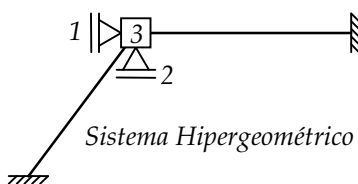
Todas as barras da estrutura do exemplo têm as mesmas propriedades elásticas e de seção transversal. O material adotado tem módulo de elasticidade  $E = 1.2 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ . A seção transversal das barras tem área  $A = 1.2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$  e momento de inércia  $I = 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ .

A figura acima também indica a configuração deformada da estrutura (com uma amplificação de 450 vezes) e as deslocabilidades  $D_1, D_2$  e  $D_3$ , correspondendo, respectivamente, aos deslocamentos horizontal e vertical e rotação do nó interno. Deslocabilidades são as componentes de deslocamentos e rotações nodais que estão livres, isto é, que devem ser conhecidas para determinar a configuração deformada de uma estrutura. As deslocabilidades são os parâmetros que definem (completamente) a configuração deformada de uma estrutura. As deslocabilidades são as incógnitas do Método dos Deslocamentos.

A metodologia utilizada pelo Método dos Deslocamentos para analisar uma estrutura consiste em: “somar uma série de casos básicos que satisfazem as condições de compatibilidade, mas que não satisfazem as condições de equilíbrio da estrutura original, para na superposição restabelecer as condições de equilíbrio.”

Cada caso básico satisfaz isoladamente as condições de compatibilidade (continuidade interna e compatibilidade com respeito aos vínculos externos da estrutura). Entretanto, os casos básicos não satisfazem as condições de equilíbrio da estrutura original pois são necessários forças e momentos adicionais para manter o equilíbrio. As condições de equilíbrio da estrutura ficam restabelecidas quando se superpõem todas as soluções básicas.

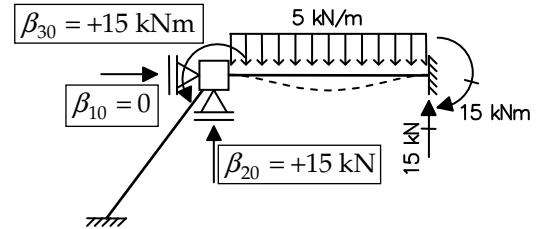
A estrutura utilizada na superposição de casos básicos é uma estrutura cinematicamente determinada obtida a partir da estrutura original pela adição de vínculos. Essa estrutura auxiliar é denominada *Sistema Hipergeométrico* (SH). Apoios fictícios são adicionados à estrutura para impedir (prender) as deslocabilidades:



O equilíbrio da estrutura é imposto na forma de equilíbrio dos nós isolados. Portanto, a solução desse problema pelo Método dos Deslocamentos recai em encontrar os valores que  $D_1, D_2$  e  $D_3$  devem ter para que o nó interno fique em equilíbrio.

No exemplo em estudo, existem quatro casos básicos – casos (0), (1), (2) e (3) – conforme descrito a seguir.

Caso (0) – solicitação externa (carregamento) isolada no SH

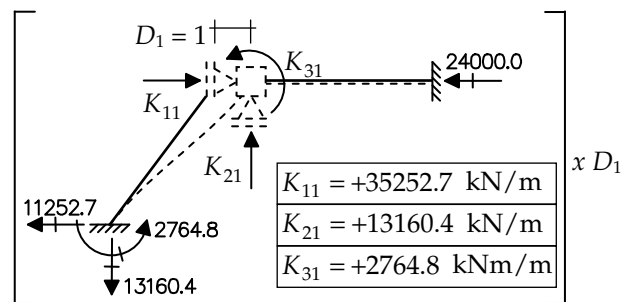


O caso (0) isola o efeito da solicitação externa, isto é, do carregamento aplicado. Dessa forma, a carga externa é aplicada no SH com  $D_1 = 0, D_2 = 0$  e  $D_3 = 0$ . Nesse caso, as forças e os momentos que aparecem nos apoios fictícios do SH são chamados de *termos de carga*:

$\beta_{i0}$  → reação no apoio fictício associado à deslocabilidade de  $D_i$  para equilibrar o SH quando atua a solicitação externa isoladamente, isto é, com deslocabilidades com valores nulos.

Neste exemplo, são três os termos de carga, sendo que  $\beta_{10}$  é a reação horizontal,  $\beta_{20}$  é a reação vertical e  $\beta_{30}$  é a reação momento nos três apoios fictícios do SH. Essas reações correspondem à situação de engastamento perfeito do SH, e os seus valores são tabelados e obtidos diretamente para diversos tipos de carregamentos de barra.

Caso (1) – Deslocabilidade  $D_1$  isolada no SH



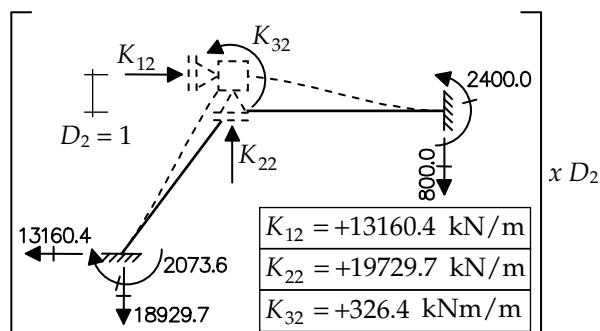
O caso (1) isola o efeito da deslocabilidade  $D_1$ , mantendo nulos os valores das deslocabilidades  $D_2$  e  $D_3$ . Conforme indicado na figura acima, a deslocabilidade  $D_1$  é colocada em evidência. Considera-se um valor unitário para  $D_1$ , sendo o efeito de  $D_1 = 1$  multiplicado pelo valor final que  $D_1$  deverá ter.

As forças e momentos que aparecem nos apoios fictícios do SH para equilibrá-lo quando é imposta uma configuração onde  $D_1 = 1$  são chamados de *coeficientes de rigidez globais*:

$K_{ij}$  → *coeficiente de rigidez global*: força ou momento que deve atuar na direção de  $D_i$  para manter a estrutura (na verdade, o SH) em equilíbrio quando é imposta uma configuração deformada onde  $D_j = 1$  e as demais deslocabilidades são nulas.

No caso (1), os coeficientes de rigidez globais são a força horizontal  $K_{11}$ , a força vertical  $K_{21}$  e o momento  $K_{31}$ . Por definição, as unidades dos coeficientes de rigidez correspondem às unidades de força ou momento divididas pela unidade da deslocabilidade em questão. Neste exemplo, no caso (1) a unidade de  $D_1$  é a de deslocamento em metros.

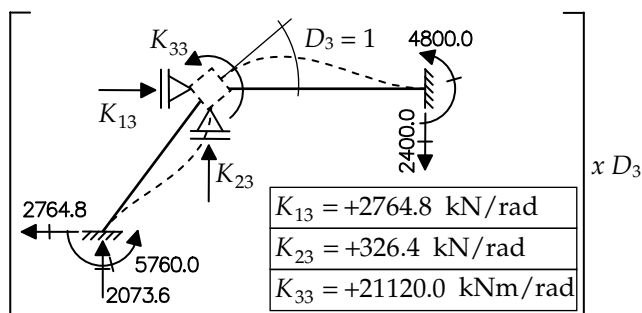
#### Caso (2) – Deslocabilidade $D_2$ isolada no SH



De maneira análoga, no caso (2) a deslocabilidade  $D_2$  é colocada em evidência, considerando o efeito devido a um valor unitário de  $D_2$  multiplicado pelo seu valor final. Esse caso isola o efeito da deslocabilidade  $D_2$ , mantendo nulos os valores das deslocabilidades  $D_1$  e  $D_3$ .

A força horizontal  $K_{12}$ , a força vertical  $K_{22}$  e o momento  $K_{32}$ , que aparecem nos apoios fictícios do SH para mantê-lo em equilíbrio quando é imposta uma configuração deformada onde  $D_2 = 1$ , são os coeficientes de rigidez globais que aparecem no caso (2). As unidades desses coeficientes, por definição, são unidades de força ou momento divididas pela unidade da deslocabilidade  $D_2$  (metro).

#### Caso (3) – Deslocabilidade $D_3$ isolada no SH



Esse caso isola o efeito da deslocabilidade  $D_3$ , mantendo nulos os valores das deslocabilidades  $D_1$  e  $D_2$ . No caso (3) a deslocabilidade  $D_3$  é colocada em evidência, considerando o efeito devido a um valor unitário de  $D_3$  multiplicado pelo seu valor final. A figura acima também mostra os coeficientes de rigidez globais desse caso. Observe que as unidades desses coeficientes são unidades de força ou momento divididas por radiano, pois a deslocabilidade  $D_3$  é uma rotação.

#### Restabelecimento das condições de equilíbrio

A partir dos resultados obtidos nos casos mostrados acima, pode-se utilizar a superposição dos casos para restabelecer as condições de equilíbrio do nó interior. As resultantes de forças e momentos externos neste nó devem ser nulas, tal como feito a seguir.

- Somatório das forças externas horizontais que atuam no nó interior:

$$\beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 + K_{13}D_3 = 0$$

- Somatório das forças externas verticais que atuam no nó interior:

$$\beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 + K_{23}D_3 = 0$$

- Somatório dos momentos externos que atuam no nó interior:

$$\beta_{30} + K_{31}D_1 + K_{32}D_2 + K_{33}D_3 = 0$$

A solução do sistema formado pelas três equações acima, com os valores mostrados anteriormente para os termos de carga  $\beta_{i0}$  e para os coeficientes de rigidez globais  $K_{ij}$ , resulta nos seguintes valores para as deslocabilidades:

$$D_1 = +0.4504 \cdot 10^{-3} \text{ m};$$

$$D_2 = -1.0480 \cdot 10^{-3} \text{ m};$$

$$D_3 = -0.7530 \cdot 10^{-3} \text{ rad}.$$

Esses valores fazem com que as resultantes de forças e momentos externos que atuam no nó interno da estrutura sejam nulas. Dessa forma, atingiu-se a solução correta da estrutura, pois além de satisfazer as condições de compatibilidade – que sempre foram satisfeitas nos casos (0), (1), (2) e (3) – ela também satisfaz as condições de equilíbrio, haja vista que não existem forças e momentos externos aplicados ao nó. O equilíbrio dos outros dois nós sempre foi satisfeito pelas reações de apoio, cujos valores finais podem obtidos pela superposição dos valores das reações obtidos em cada caso.

Os sinais das deslocabilidades são determinados pelos sentidos em que foram impostos os deslocamentos unitários e a rotação unitária nos casos básicos. Assim, o sinal positivo de  $D_1$  indica que esse deslocamento tem o mesmo sentido (da esquerda para a direita) do deslocamento horizontal imposto no caso (1). O sinal negativo de  $D_2$  indica que esse deslocamento vertical é para baixo pois é contrário ao deslocamento unitário imposto no caso (2). E o sinal negativo de  $D_3$  mostra que essa rotação é no sentido horário pois é contrária à rotação unitária imposta no caso (3).

#### Determinação dos esforços internos finais

Uma vez determinados os valores das deslocabilidades, os diagramas finais de esforços da estrutura do exemplo em estudo também podem ser obtidos pela superposição dos diagramas de cada um dos casos básicos. Por exemplo, os momentos fletores finais ( $M$ ) podem ser obtidos pela superposição dos diagramas de momentos fletores ( $M_i$ ) dos casos básicos:

$$M = M_0 + M_1D_1 + M_2D_2 + M_3D_3,$$

sendo que o diagrama  $M_0$  corresponde ao caso (0) e os diagramas  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  são devidos a valores unitários das deslocabilidades nos casos (1), (2) e (3).

Esse resultado pode ser generalizado para os esforços normais finais ( $N$ ) e esforços cortantes finais ( $Q$ ):

$$N = N_0 + N_1D_1 + N_2D_2 + N_3D_3;$$

$$Q = Q_0 + Q_1D_1 + Q_2D_2 + Q_3D_3.$$