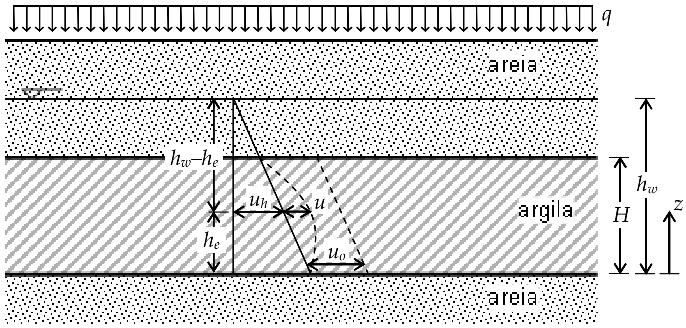
CIV 2552 – Métodos Numéricos em Problemas de Fluxo e Transporte em Meios Porosos – 2008.2

Formulação de Problemas de Adensamento por Volume de Controle em Diferenças Finitas

Camada homogênea: parâmetros do modelo

$u \rightarrow$ excesso de poropressão [F/L²]
$u_0 \rightarrow$ excesso inicial de poropressão devido à sobrecarga [F/L²]
$u_h \rightarrow$ poropressão hidrostática [F/L²]
$h \rightarrow$ carga hidráulica [L]
$he \rightarrow$ carga de elevação (em relação ao referencial de carga hidráulica) [L]
$h_w \rightarrow$ nível do lençol freático [L]
$k \rightarrow$ permeabilidade do meio [L/T]
$\gamma_w \rightarrow$ densidade do fluído (água) [F/L³]
$m_V \rightarrow$ compressibilidade do esqueleto [L²/F]
$S_s = \gamma_w \cdot m_V \rightarrow$ armazenamento específico (*specific storage*) do meio poroso [1/L]
$C_V = k / S_s \rightarrow$ coeficiente de adensamento [L²/T]

$q \rightarrow$ sobrecarga [F/L²]
$A \rightarrow$ área da seção da coluna unidimensional [L²]
$H \rightarrow$ espessura da camada [L]



Relação entre carga hidráulica e excesso de poropressão

Considerando que o nível do lençol freático não se altera, a poropressão final em regime permanente é a poropressão hidrostática. Dessa forma:

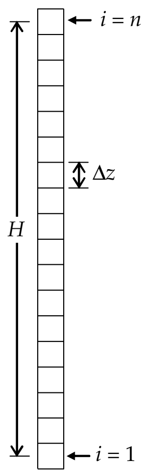
$$h = \frac{u_h + u}{\gamma_w} + he \quad \rightarrow \quad h = \frac{u}{\gamma_w} + \frac{u_h}{\gamma_w} + he = \frac{u}{\gamma_w} + (h_w - he) + he \quad \rightarrow \quad \boxed{h = \frac{u}{\gamma_w} + h_w}$$

Lei de Darcy

fluxo hidráulico [L/T] $\rightarrow$ $$q = -k \cdot \frac{dh}{dz} = -\frac{k}{\gamma_w} \cdot \frac{du}{dz} - k \cdot \frac{dh_w}{dz} \quad \rightarrow \quad \boxed{q = -\frac{k}{\gamma_w} \cdot \frac{du}{dz}}$$

Parâmetros de discretização

$n \rightarrow$ número de pontos (células) ao longo da espessura da camada
$\Delta z = H/(n-1) \rightarrow$ comprimento da célula na direção z [L]
($H \rightarrow$ do centro da primeira célula para centro da última célula)



Condições de contorno

$u(z=0) = ub \rightarrow$ excesso de poropressão prescrito no bordo inferior (*bottom*)
ou

$$q\big|_{z=0} = 0 \;\rightarrow\; \left.\frac{du}{dz}\right|_{z=0} = 0 \;\rightarrow\; \text{camada impermeável no bordo inferior}$$

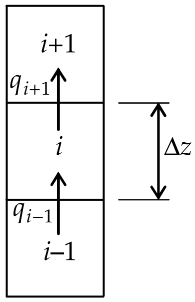
$u(z=H) = ut \rightarrow$ excesso de poropressão prescrito no bordo superior (*top*)
ou

$$q\big|_{z=H} = 0 \;\rightarrow\; \left.\frac{du}{dz}\right|_{z=H} = 0 \;\rightarrow\; \text{camada impermeável no bordo superior}$$

Balanço de vazão hidráulica em uma célula

(a célula é um volume de controle; convenção: vazão que entra na célula é positivo)

[*Vazão que entra na célula*] = [*Vazão que sai da célula*] + [*Vazão retida dentro da célula*]



$$[q_{i-1} \cdot A] = [q_{i+1} \cdot A] + \left[S_s \cdot \Delta z \cdot A \cdot \frac{\partial h_i}{\partial t} \right]$$

$$q_{i-1} \cdot A - q_{i+1} \cdot A = S_s \cdot \Delta z \cdot A \cdot \frac{\partial h_i}{\partial t} \qquad [\div A] \quad \Rightarrow \quad q_{i-1} - q_{i+1} = S_s \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial h_i}{\partial t}$$

Usando a Lei de Darcy e a aproximação de derivada em diferenças finitas:

$$\left(q \cong -\frac{k}{\gamma_w} \cdot \Delta h / \Delta z \right) \text{ e } \quad \Rightarrow \quad \left(-k \cdot \frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta z} \right) - \left(-k \cdot \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta z} \right) = S_s \cdot \frac{\partial h_i}{\partial t} \cdot \Delta z \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{k \cdot \frac{h_{i-1} - 2h_i + h_{i+1}}{\Delta z^2} = S_s \cdot \frac{\partial h_i}{\partial t}}$$

Usando a relação entre carga hidráulica e excesso de poropressão:

$$k \cdot \frac{\dfrac{u_{i-1}}{\gamma_w} - \dfrac{2u_i}{\gamma_w} + \dfrac{u_{i+1}}{\gamma_w} + h_w - 2h_w + h_w}{\Delta z^2} = S_s \cdot \frac{\partial h_i}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k}{\gamma_w} \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta z} = \frac{S_s}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} \cdot \Delta z$$

Observe que:

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = \frac{1}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial h_w}{\partial t} = \frac{1}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t}$$

$$[\times \gamma_w / k] \quad \Rightarrow \quad \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta z^2} = \frac{S_s}{k} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta z^2} = \frac{1}{C_V} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t}}$$

Solução explícita da resposta transiente

Considerando que os valores de excesso de poropressão em todos os pontos são conhecidos em um passo de tempo genérico (m), a aproximação da resposta para o passo seguinte de tempo (m+1) na solução explícita é tal que cada valor u_i^{m+1} só depende de valores do passo anterior. Isso resulta em:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} \cong \frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad -\frac{u_i^{m+1}}{C_V \cdot \Delta t} = -\frac{u_{i-1}^m - 2u_i^m + u_{i+1}^m}{\Delta z^2} - \frac{u_i^m}{C_V \cdot \Delta t}$$

$$[\times(-C_V \cdot \Delta t)] \quad \Rightarrow \quad (i = 2 : n-1) \ \rightarrow \ u_i^{m+1} = u_i^m + \frac{C_V \cdot \Delta t}{\Delta z^2} \cdot \left(u_{i-1}^m - 2u_i^m + u_{i+1}^m \right)$$

Sendo $\boxed{r = \dfrac{C_V \cdot \Delta t}{\Delta z^2}} \quad \Rightarrow \quad (i = 2 : n-1) \ \rightarrow \ \boxed{u_i^{m+1} = r \cdot u_{i-1}^m + (1-2r) \cdot u_i^m + r \cdot u_{i+1}^m}$

Uma questão importante que aparece é quanto aos valores de Δz e Δt [1]. Eles podem ser escolhidos independentemente? Para responder esta pergunta, considere uma situação em que $\Delta t >> \Delta z$, fazendo com r tenha um valor grande e (1 – 2r) negativo. O valor de u_i^{m+1} passaria a depender negativamente de u_i^m e positivamente dos dois valores visinhos. Isso resulta em uma solução oscilatória da equação acima. Para evitar essa situação, e como r > 0 sempre, é preciso manter (1 – 2r) > 0. Além disso, quanto r = ½, o valor de u_i no novo passo de tempo não receberia influência do valor no mesmo ponto no passo de tempo anterior, mas somente dos dois pontos visinhos, o que é uma situação não realista fisicamente. Portanto, na solução explícita existe um requisito para a estabilidade numérica do processo:

$$\boxed{r = \frac{C_V \cdot \Delta t}{\Delta z^2} < \frac{1}{2}}$$

Esse requisito, dado que em geral o incremento Δz da discretização do domínio é estabelecido *a priori*, estabelece um limite para o valor do incremento de tempo Δt.

---

[1] Ref.: Frind, E.O., *Groundwater Modelling (Numerical Methods)*, Lecture Notes Earth 456/656, Department of Earth Sciences, University of Waterloo, 1995.

Condições de contorno do tipo Dirichlet

$(i=1) \rightarrow \boxed{u_1 = ub}$ $\qquad$ $(i=n) \rightarrow \boxed{u_n = ut}$

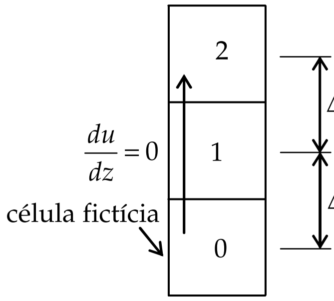
Condições de contorno do tipo Neuman

$(i=1):$

$$\left.\frac{du}{dz}\right|_{z=0} = 0 \;\rightarrow\; \frac{u_2 - u_0}{2\Delta z} = 0 \;\rightarrow\; u_0 = u_2$$

$$u_1^{m+1} = r \cdot u_0^m + (1-2r) \cdot u_1^m + r \cdot u_2^m \quad \Rightarrow$$

$$(i=1) \;\rightarrow\; \boxed{u_1^{m+1} = (1-2r) \cdot u_1^m + 2r \cdot u_2^m}$$

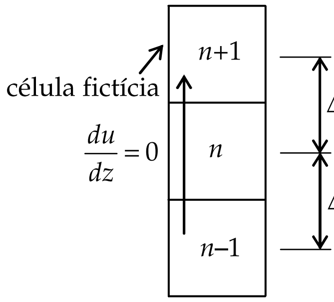


$(i=n):$

$$\left.\frac{du}{dz}\right|_{z=H} = 0 \;\rightarrow\; \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta z} = 0 \;\rightarrow\; u_{n+1} = u_{n-1}$$

$$u_n^{m+1} = r \cdot u_{n-1}^m + (1-2r) \cdot u_n^m + r \cdot u_{n+1}^m \quad \Rightarrow$$

$$(i=n) \;\rightarrow\; \boxed{u_n^{m+1} = 2r \cdot u_{n-1}^m + (1-2r) \cdot u_n^m}$$



Solução implícita da resposta transiente: Método de Crank-Nicolson

A aproximação em diferenças finitas da segunda derivada do excesso de poropressão em relação a z é considerada como uma média de valores calculados no passo de tempo (m) e no passo seguinte de tempo (m+1):

$$\frac{1}{2}\left[\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta z^2}\right]^m + \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta z^2}\right]^{m+1} = \frac{1}{C_V} \cdot \frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\Delta t} \quad \rightarrow$$

$$\left[\times \Delta z^2\right] \;\Rightarrow\; \frac{u_{i-1}^{m+1} - 2u_i^{m+1} + u_{i+1}^{m+1}}{2} - \frac{u_i^{m+1}}{C_V \cdot \Delta t} \cdot \Delta z^2 = -\frac{u_{i-1}^m - 2u_i^m + u_{i+1}^m}{2} - \frac{u_i^m}{C_V \cdot \Delta t} \cdot \Delta z^2$$

$$r = \frac{C_V \cdot \Delta t}{\Delta z^2} \quad \Rightarrow \quad (i = 2 : n-1) \;\rightarrow\; \boxed{-u_{i-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{2}{r}\right) u_i^{m+1} - u_{i+1}^{m+1} = u_{i-1}^m + \left(\frac{2}{r} - 2\right) u_i^m + u_{i+1}^m}$$

Condições de contorno do tipo Dirichlet

$(i=1) \rightarrow \boxed{u_1 = ub}$ $\qquad$ $(i=n) \rightarrow \boxed{u_n = ut}$

Condições de contorno do tipo Neuman

$(i=1):$

Valor da poropressão na célula fictícia: $u_0 = u_2$

$$-u_0^{m+1} + \left(2 + \frac{2}{r}\right) u_1^{m+1} - u_2^{m+1} = u_0^m + \left(\frac{2}{r} - 2\right) u_1^m + u_2^m$$

$$(i=1) \;\rightarrow\; \boxed{\left(2 + \frac{2}{r}\right) u_1^{m+1} - 2u_2^{m+1} = \left(\frac{2}{r} - 2\right) u_1^m + 2u_2^m}$$

$(i=n):$

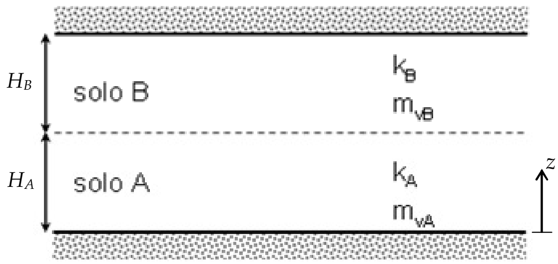
Valor da poropressão na célula fictícia: $u_{n+1} = u_{n-1}$

$$-u_{n-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{2}{r}\right) u_n^{m+1} - u_{n+1}^{m+1} = u_{n-1}^m + \left(\frac{2}{r} - 2\right) u_n^m + u_{n+1}^m$$

$$(i=n) \;\rightarrow\; \boxed{-2u_{n-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{2}{r}\right) u_n^{m+1} = 2u_{n-1}^m + \left(\frac{2}{r} - 2\right) u_n^m}$$

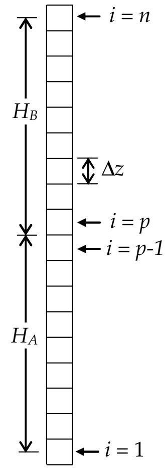
Camada dupla (heterogênea): parâmetros adicionais do modelo

$k_A \rightarrow$ permeabilidade do meio A [L/T]
$k_B \rightarrow$ permeabilidade do meio B [L/T]
$m_{VA} \rightarrow$ compressibilidade do esqueleto do meio A [L²/F]
$m_{VB} \rightarrow$ compressibilidade do esqueleto do meio B [L²/F]
$H_A \rightarrow$ espessura da camada A [L]
$H_B \rightarrow$ espessura da camada B [L]



Parâmetros de discretização

$\Delta z \rightarrow$ comprimento da célula na direção z (adotado o mesmo para as duas camadas) [L]
$n_A \rightarrow$ número de pontos (células) ao longo da espessura da camada A
$n_B \rightarrow$ número de pontos (células) ao longo da espessura da camada B



Permeabilidade equivalente na interface entre as camadas

$$q_{p-1} = q_{p-1}^A = q_{p-1}^B$$

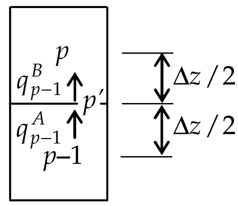
$$q_{p-1}^A = -k_A \cdot \frac{h_{p'} - h_{p-1}}{\Delta z/2} = k_A \cdot \frac{h_{p-1} - h_{p'}}{\Delta z/2} \quad \Rightarrow \quad h_{p-1} - h_{p'} = \frac{q_{p-1}^A}{k_A} \cdot \frac{\Delta z}{2}$$

$$q_{p-1}^B = -k_B \cdot \frac{h_p - h_{p'}}{\Delta z/2} = k_B \cdot \frac{h_{p'} - h_p}{\Delta z/2} \quad \Rightarrow \quad h_{p'} - h_p = \frac{q_{p-1}^B}{k_B} \cdot \frac{\Delta z}{2}$$

$$q_{p-1} = -k_e \cdot \frac{h_p - h_{p-1}}{\Delta z} = k_e \cdot \frac{h_{p-1} - h_p}{\Delta z} = k_e \cdot \frac{h_{p-1} - h_{p'} + h_{p'} - h_p}{\Delta z}$$

$$q_{p-1} = k_e \cdot \frac{\left(q_{p-1}^A / k_A\right) \cdot (\Delta z/2) + \left(q_{p-1}^B / k_B\right) \cdot (\Delta z/2)}{\Delta z} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{k_e}{2} \cdot \left(\frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{k_e = \frac{2 \cdot k_A \cdot k_B}{k_A + k_B}}$$

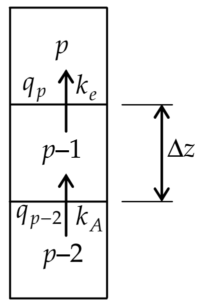


Balanço de vazão hidráulica nas células da interface

Célula p–1:

$$\left[q_{p-2} \cdot A\right] = \left[q_p \cdot A\right] + \left[S_{sA} \cdot \Delta z \cdot A \cdot \frac{\partial h_{p-1}}{\partial t}\right] \qquad [\div A] \quad \Rightarrow$$

$$\left(-k_A \cdot \frac{h_{p-1} - h_{p-2}}{\Delta z}\right) - \left(-k_e \cdot \frac{h_p - h_{p-1}}{\Delta z}\right) = S_{sA} \cdot \frac{\partial h_{p-1}}{\partial t} \cdot \Delta z$$



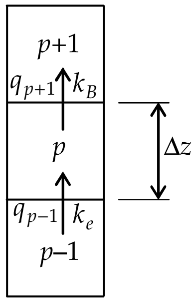
$$\frac{k_A \cdot \left(u_{p-2}/\gamma_w + h_w\right) - k_A \cdot \left(u_{p-1}/\gamma_w + h_w\right) - k_e \cdot \left(u_{p-1}/\gamma_w + h_w\right) + k_e \cdot \left(u_p/\gamma_w + h_w\right)}{\Delta z} = \frac{S_{sA}}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial u_{p-1}}{\partial t} \cdot \Delta z$$

$$\frac{k_A \cdot u_{p-2}/\gamma_w - k_A \cdot u_{p-1}/\gamma_w - k_e \cdot u_{p-1}/\gamma_w + k_e \cdot u_p/\gamma_w + k_A \cdot h_w - k_A \cdot h_w - k_e \cdot h_w + k_e \cdot h_w}{\Delta z} = m_{VA} \cdot \frac{\partial u_{p-1}}{\partial t} \cdot \Delta z$$

$$\frac{1}{\gamma_w} \cdot \frac{k_A \cdot u_{p-2} - k_A \cdot u_{p-1} - k_e \cdot u_{p-1} + k_e \cdot u_p}{\Delta z} = m_{VA} \cdot \frac{\partial u_{p-1}}{\partial t} \cdot \Delta z$$

$$\boxed{\frac{k_A \cdot u_{p-2} - (k_A + k_e) \cdot u_{p-1} + k_e \cdot u_p}{\Delta z^2} = \gamma_w \cdot m_{VA} \cdot \frac{\partial u_{p-1}}{\partial t}}$$

Célula p:



$$\left[q_{p-1}\cdot A\right]=\left[q_{p+1}\cdot A\right]+\left[S_{sB}\cdot\Delta z\cdot A\cdot\frac{\partial h_p}{\partial t}\right]\qquad[\div A]\ \Rightarrow$$

$$\left(-k_e\cdot\frac{h_p-h_{p-1}}{\Delta z}\right)-\left(-k_B\cdot\frac{h_{p+1}-h_p}{\Delta z}\right)=S_{sB}\cdot\frac{\partial h_p}{\partial t}\cdot\Delta z$$

$$\frac{k_e\cdot(u_{p-1}/\gamma_w+h_w)-k_e\cdot(u_p/\gamma_w+h_w)-k_B\cdot(u_p/\gamma_w+h_w)+k_B\cdot(u_{p+1}/\gamma_w+h_w)}{\Delta z}=\frac{S_{sB}}{\gamma_w}\cdot\frac{\partial u_p}{\partial t}\cdot\Delta z$$

$$\frac{k_e\cdot u_{p-1}/\gamma_w-k_e\cdot u_p/\gamma_w-k_B\cdot u_p/\gamma_w+k_B\cdot u_{p+1}/\gamma_w+k_e\cdot h_w-k_e\cdot h_w-k_B\cdot h_w+k_B\cdot h_w}{\Delta z}=m_{VB}\cdot\frac{\partial u_p}{\partial t}\cdot\Delta z$$

$$\frac{1}{\gamma_w}\cdot\frac{k_e\cdot u_{p-1}-k_e\cdot u_p-k_B\cdot u_p+k_B\cdot u_{p+1}}{\Delta z}=m_{VB}\cdot\frac{\partial u_p}{\partial t}\cdot\Delta z$$

$$\boxed{\frac{k_e\cdot u_{p-1}-(k_e+k_B)\cdot u_p+k_B\cdot u_{p+1}}{\Delta z^2}=\gamma_w\cdot m_{VB}\cdot\frac{\partial u_p}{\partial t}}$$

Solução explícita da resposta transiente

Célula p–1:

$$\frac{\partial u_{p-1}}{\partial t}\cong\frac{u_{p-1}^{m+1}-u_{p-1}^{m}}{\Delta t}\quad\Rightarrow\quad-\gamma_w\cdot m_{VA}\cdot\frac{u_{p-1}^{m+1}}{\Delta t}=-\frac{k_A\cdot u_{p-2}^{m}-(k_A+k_e)\cdot u_{p-1}^{m}+k_e\cdot u_p^{m}}{\Delta z^2}-\gamma_w\cdot m_{VA}\cdot\frac{u_{p-1}^{m}}{\Delta t}$$

$$\boxed{r_A=\frac{1}{\gamma_w\cdot m_{VA}}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta z^2}}\quad\Rightarrow\quad(i=p-1)\ \rightarrow\ \boxed{u_{p-1}^{m+1}=r_A\cdot k_A\cdot u_{p-2}^{m}+\left[1-r_A\cdot(k_A+k_e)\right]\cdot u_{p-1}^{m}+r_A\cdot k_e\cdot u_p^{m}}$$

Célula p:

$$\frac{\partial u_p}{\partial t}\cong\frac{u_p^{m+1}-u_p^{m}}{\Delta t}\quad\Rightarrow\quad-\gamma_w\cdot m_{VB}\cdot\frac{u_p^{m+1}}{\Delta t}=-\frac{k_e\cdot u_{p-1}^{m}-(k_e+k_B)\cdot u_p^{m}+k_B\cdot u_{p+1}^{m}}{\Delta z^2}-\gamma_w\cdot m_{VB}\cdot\frac{u_p^{m}}{\Delta t}$$

$$\boxed{r_B=\frac{1}{\gamma_w\cdot m_{VB}}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta z^2}}\quad\Rightarrow\quad(i=p)\ \rightarrow\ \boxed{u_p^{m+1}=r_B\cdot k_e\cdot u_{p-1}^{m}+\left[1-r_B\cdot(k_e+k_B)\right]\cdot u_p^{m}+r_B\cdot k_B\cdot u_{p+1}^{m}}$$

Solução implícita da resposta transiente: Método de Crank-Nicolson

Célula p–1:

$$(i=p-1)\ \rightarrow\ \boxed{-k_A\cdot u_{p-2}^{m+1}+\left[(k_A+k_e)+\frac{2}{r_A}\right]\cdot u_{p-1}^{m+1}-k_e\cdot u_p^{m+1}=k_A\cdot u_{p-2}^{m}+\left[\frac{2}{r_A}-(k_A+k_e)\right]\cdot u_{p-1}^{m}+k_e\cdot u_p^{m}}$$

Célula p:

$$(i=p)\ \rightarrow\ \boxed{-k_e\cdot u_{p-1}^{m+1}+\left[(k_e+k_B)+\frac{2}{r_B}\right]\cdot u_p^{m+1}-k_B\cdot u_{p+1}^{m+1}=k_e\cdot u_{p-1}^{m}+\left[\frac{2}{r_B}-(k_e+k_B)\right]\cdot u_p^{m}+k_B\cdot u_{p+1}^{m}}$$