CIV 2552 – Métodos Numéricos em Problemas de Fluxo e Transporte em Meios Porosos – 2008.2

Fluxo hidráulico em meios porosos – modelo unidimensional

Formulação por Volume de Controle em Diferenças Finitas

Parâmetros do modelo

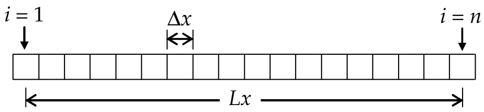
$u \rightarrow$ carga hidráulica [L]
$k \rightarrow$ permeabilidade do meio [L/T]
$S_s \rightarrow$ armazenamento específico (*specific storage*) do meio poroso [1/L]
$\alpha = \dfrac{k}{S_s} \rightarrow$ parâmetro de "difusividade" (no problema de adensamento, é o coeficiente C_V) [L^2/T]
$A \rightarrow$ área da seção transversal do canal do fluxo [L^2]
$Lx \rightarrow$ comprimento do modelo [L]

Lei de Darcy

$q = -k \cdot du/dx \rightarrow$ fluxo hidráulico [L/T]

Parâmetros de discretização

$n \rightarrow$ número de pontos (células) do modelo unidimensional
$\Delta x = Lx/(n-1) \rightarrow$ comprimento da célula na direção x [L]
($Lx \rightarrow$ do centro da primeira célula para centro da última célula)



Condições de contorno

$u(x{=}0) = ul \rightarrow$ carga hidráulica prescrita no bordo esquerdo
ou
$q(x{=}0) = ql \rightarrow$ fluxo prescrito no bordo esquerdo

$u(x{=}L) = ur \rightarrow$ carga hidráulica prescrita no bordo direito
ou
$q(x{=}Lx) = qr \rightarrow$ fluxo prescrito no bordo direito

Fonte externa

$s \rightarrow$ fonte externa de vazão hidráulica distribuída por comprimento de canal [L^2/T]
(a fonte pode ser pontual, mas na dedução ela será considerada distribuída)

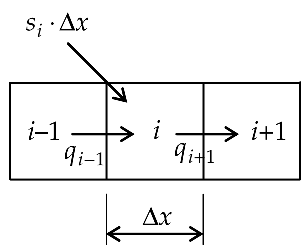
Balanço de vazão hidráulica em uma célula

(a célula é um volume de controle; convenção: vazão que entra na célula é positivo)

[*Vazão que entra na célula*] = [*Vazão que sai da célula*] + [*Vazão retida dentro da célula*]

$$\left[q_{i-1} \cdot A + s_i \cdot \Delta x\right] = \left[q_{i+1} \cdot A\right] + \left[S_s \cdot \Delta x \cdot A \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t}\right]$$

$$q_{i-1} \cdot A - q_{i+1} \cdot A = S_s \cdot \Delta x \cdot A \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} - s_i \cdot \Delta x$$



Usando a Lei de Darcy e a aproximação de derivada em diferenças finitas:
$(q \cong -k \cdot \Delta u/\Delta x)$

$$\left(-k \cdot A \cdot \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}\right) - \left(-k \cdot A \cdot \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}\right) = S_s \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot A - s_i \cdot \Delta x$$

$$[\times 1/(\Delta x \cdot k \cdot A)] \Rightarrow \quad \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = \frac{S_s}{k} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{s_i}{k \cdot A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{s_i}{k \cdot A}}$$

Solução explícita da resposta transiente

Considerando que os valores de carga hidráulica em todos os pontos são conhecidos em um passo de tempo genérico (m), a aproximação da resposta para o passo seguinte de tempo (m+1) na solução explícita é tal que cada valor u_i^{m+1} só depende de valores do passo anterior. Isso resulta em:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} \cong \frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad -\frac{u_i^{m+1}}{\alpha \cdot \Delta t} = -\frac{u_{i-1}^m - 2u_i^m + u_{i+1}^m}{\Delta x^2} - \frac{u_i^m}{\alpha \cdot \Delta t} - \frac{s_i^m}{k \cdot A}$$

$$[\times(-\alpha \cdot \Delta t)] \Rightarrow \quad (i = 2 : n-1) \rightarrow \; u_i^{m+1} = u_i^m + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \cdot \left(u_{i-1}^m - 2u_i^m + u_{i+1}^m\right) + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{k \cdot A} \cdot s_i^m$$

Sendo $\boxed{r = \dfrac{\alpha \cdot \Delta t}{\Delta x^2}} \quad \Rightarrow \quad (i = 2 : n-1) \rightarrow \boxed{u_i^{m+1} = r \cdot u_{i-1}^m + (1-2r) \cdot u_i^m + r \cdot u_{i+1}^m + \dfrac{\alpha \cdot \Delta t}{k \cdot A} \cdot s_i^m}$

Condições de contorno do tipo Dirichlet

$(i = 1) \rightarrow \boxed{u_1 = ul}$

$(i = n) \rightarrow \boxed{u_n = ur}$

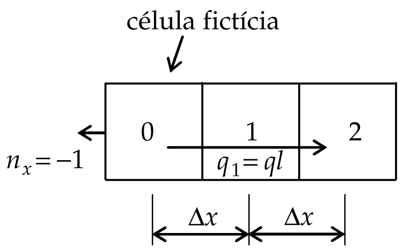
Condições de contorno do tipo Neuman

$(i = 1)$:

$$q = -k \cdot \frac{du}{dx} \cdot n_x \;\rightarrow\; q_1 \cong -k \cdot \frac{u_2 - u_0}{2\Delta x} \cdot (-1) = ql \;\rightarrow\; u_0 = u_2 - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

$$u_1^{m+1} = r \cdot u_0^m + (1-2r) \cdot u_1^m + r \cdot u_2^m + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{k \cdot A} \cdot s_1^m \quad \Rightarrow$$

$$(i = 1) \rightarrow \boxed{u_1^{m+1} = (1-2r) \cdot u_1^m + 2r \cdot u_2^m + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{k \cdot A} \cdot s_1^m - ql \cdot \frac{r \cdot 2\Delta x}{k}}$$

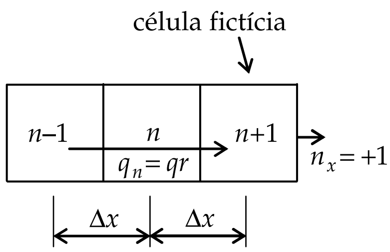


$(i = n)$:

$$q = -k \cdot \frac{du}{dx} \cdot n_x \;\rightarrow\; q_n \cong -k \cdot \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta x} \cdot (+1) = qr \;\rightarrow\; u_{n+1} = u_{n-1} - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

$$u_n^{m+1} = r \cdot u_{n-1}^m + (1-2r) \cdot u_n^m + r \cdot u_{n+1}^m + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{k \cdot A} \cdot s_n^m \quad \Rightarrow$$

$$(i = n) \rightarrow \boxed{u_n^{m+1} = 2r \cdot u_{n-1}^m + (1-2r) \cdot u_n^m + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{k \cdot A} \cdot s_n^m - qr \cdot \frac{r \cdot 2\Delta x}{k}}$$



Solução implícita da resposta transiente: Método de Crank-Nicolson

A aproximação em diferenças finitas da segunda derivada da carga hidráulica em relação a x é considerada como uma média de valores calculados no passo de tempo (m) e no passo seguinte de tempo (m+1):

$$\frac{1}{2}\left[\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{\Delta x^2}\right]^m+\frac{1}{2}\left[\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{\Delta x^2}\right]^{m+1}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{u_i^{m+1}-u_i^m}{\Delta t}-\frac{s_i^m}{k\cdot A}\quad\rightarrow$$

$$\left[\times\Delta x^2\right]\;\Rightarrow\quad\frac{u_{i-1}^{m+1}-2u_i^{m+1}+u_{i+1}^{m+1}}{2}-\frac{u_i^{m+1}}{\alpha\cdot\Delta t}\cdot\Delta x^2=-\frac{u_{i-1}^m-2u_i^m+u_{i+1}^m}{2}-\frac{u_i^m}{\alpha\cdot\Delta t}\cdot\Delta x^2-\frac{s_i^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2$$

$$r=\frac{\alpha\cdot\Delta t}{\Delta x^2}\quad\Rightarrow\quad(i=2:n-1)\;\rightarrow\;\boxed{-u_{i-1}^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)u_i^{m+1}-u_{i+1}^{m+1}=u_{i-1}^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)u_i^m+u_{i+1}^m+2\frac{s_i^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2}$$

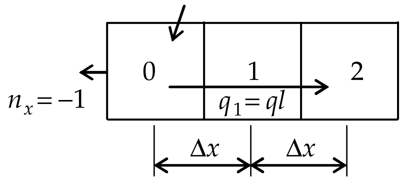
Condições de contorno do tipo Dirichlet

$$(i=1)\;\rightarrow\;\boxed{u_1=ul}$$

$$(i=n)\;\rightarrow\;\boxed{u_n=ur}$$

Condições de contorno do tipo Neuman

$(i=1)$:



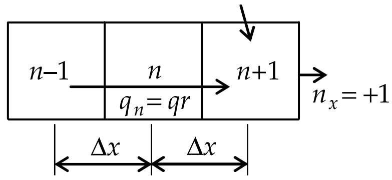
$$q=-k\cdot\frac{du}{dx}\cdot n_x\;\rightarrow\;q_1\cong-k\cdot\frac{u_2-u_0}{2\Delta x}\cdot(-1)=ql\;\rightarrow\;u_0=u_2-ql\cdot\frac{2\Delta x}{k}$$

$$-u_0^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)u_1^{m+1}-u_2^{m+1}=u_0^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)u_1^m+u_2^m+2\frac{s_1^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2$$

$$\Rightarrow\quad-\left(u_2^{m+1}-ql\cdot\frac{2\Delta x}{k}\right)+\left(2+\frac{2}{r}\right)u_1^{m+1}-u_2^{m+1}=\left(u_2^m-ql\cdot\frac{2\Delta x}{k}\right)+\left(\frac{2}{r}-2\right)u_1^m+u_2^m+2\frac{s_1^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2$$

$$(i=1)\;\rightarrow\;\boxed{\left(2+\frac{2}{r}\right)u_1^{m+1}-2u_2^{m+1}=\left(\frac{2}{r}-2\right)u_1^m+2u_2^m+2\frac{s_1^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2-ql\cdot\frac{4\Delta x}{k}}$$

$(i=n)$:



$$q=-k\cdot\frac{du}{dx}\cdot n_x\;\rightarrow\;q_n\cong-k\cdot\frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2\Delta x}\cdot(+1)=qr\;\rightarrow\;u_{n+1}=u_{n-1}-qr\cdot\frac{2\Delta x}{k}$$

$$-u_{n-1}^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)u_n^{m+1}-u_{n+1}^{m+1}=u_{n-1}^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)u_n^m+u_{n+1}^m+2\frac{s_i^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2$$

$$\Rightarrow\quad-u_{n-1}^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)u_n^{m+1}-\left(u_{n-1}^{m+1}-qr\cdot\frac{2\Delta x}{k}\right)=u_{n-1}^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)u_n^m+\left(u_{n-1}^m-qr\cdot\frac{2\Delta x}{k}\right)+2\frac{s_n^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2$$

$$(i=n)\;\rightarrow\;\boxed{-2u_{n-1}^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)u_n^{m+1}=2u_{n-1}^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)u_n^m+2\frac{s_n^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2-qr\cdot\frac{4\Delta x}{k}}$$