

CIV 2552 – Métodos Numéricos em Problemas de Fluxo e Transporte em Meios Porosos – 2008.2

Fluxo hidráulico em meios porosos – modelo bidimensional

Formulação por Volume de Controle em Diferenças Finitas – Técnica de Direções Alternadas

Parâmetros do modelo

u → carga hidráulica [L]

k → permeabilidade do meio (considerado meio homogêneo) [L/T]

S_s → armazenamento específico (*specific storage*) do meio poroso [1/L]

$\alpha = \frac{k}{S_s}$ → parâmetro de “difusividade” [L²/T]

e → espessura do meio bidimensional [L]

L_x → dimensão do modelo na direção horizontal x [L]

L_y → dimensão do modelo na direção horizontal y [L]

Lei de Darcy

$q_x = -k \cdot \partial u / \partial x$ → fluxo hidráulico na direção x [L/T]

$q_y = -k \cdot \partial u / \partial y$ → fluxo hidráulico na direção y [L/T]

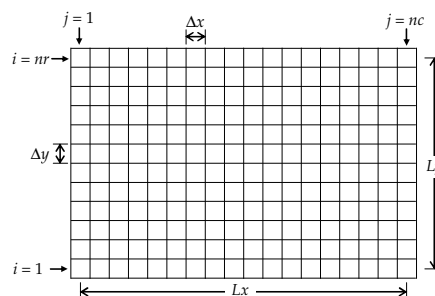
Parâmetros da malha

nr → número de linhas (*rows*) do *grid*

nc → número de colunas do *grid*

$\Delta x = L_x / (nc - 1)$ → tamanho do lado da célula na direção x [m]

$\Delta y = L_y / (nr - 1)$ → tamanho do lado da célula na direção y [m]



Condições de contorno

$u(x=0,y) = u_l$ → carga hidráulica prescrita no bordo esquerdo; ou

$q_x(x=0,y) = q_l$ → fluxo prescrita no bordo esquerdo

$u(x=L_x,y) = u_r$ → carga hidráulica prescrita no bordo direito; ou

$q_x(x=L_x,y) = q_r$ → fluxo prescrita no bordo direito

$u(x,y=0) = u_b$ → carga hidráulica prescrita no bordo inferior; ou

$q_y(x,y=0) = q_b$ → fluxo prescrita no bordo inferior

$u(x,y=L_y) = u_t$ → carga hidráulica prescrita no bordo superior; ou

$q_y(x,y=L_y) = q_t$ → fluxo prescrita no bordo superior

Fonte externa

s → fonte externa de vazão hidráulica distribuída por área [L/T]

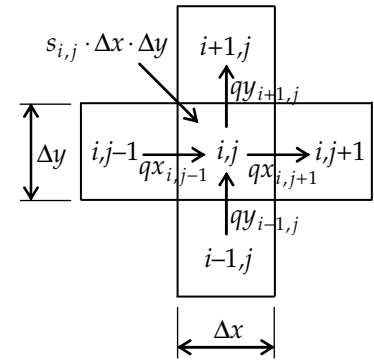
(a fonte pode ser pontual, mas na dedução ela será considerada distribuída)

Balço de vazão hidráulica em uma célula

(a célula é um volume de controle; convenção: vazão que entra na célula é positivo)

[Vazão que entra na célula] = [Vazão que sai da célula] + [Vazão retida dentro da célula]

$$\begin{aligned} & \left[qx_{i,j-1} \cdot \Delta y \cdot e + qy_{i-1,j} \cdot \Delta x \cdot e + s_{i,j} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \right] = \\ & \left[qx_{i,j+1} \cdot \Delta y \cdot e + qy_{i+1,j} \cdot \Delta x \cdot e \right] + \left[S_s \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot e \cdot \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} \right] \\ & qx_{i,j-1} \cdot \Delta y \cdot e - qx_{i,j+1} \cdot \Delta y \cdot e + qy_{i-1,j} \cdot \Delta x \cdot e - qy_{i+1,j} \cdot \Delta x \cdot e = \\ & S_s \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot e \cdot \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} - s_{i,j} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \end{aligned}$$



Usando a Lei de Darcy e a aproximação de derivadas em diferenças finitas:
 $(qx \cong -k \cdot \Delta u / \Delta x; \quad qy \cong -k \cdot \Delta u / \Delta y)$

$$\begin{aligned} & \left(-k \cdot \Delta y \cdot e \cdot \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta x} \right) - \left(-k \cdot \Delta y \cdot e \cdot \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta x} \right) + \left(-k \cdot \Delta x \cdot e \cdot \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta y} \right) - \left(-k \cdot \Delta x \cdot e \cdot \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta y} \right) = \\ & S_s \cdot \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot e - s_{i,j} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \end{aligned}$$

$$[\div (k \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot e)] \Rightarrow \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta y^2} = \frac{S_s}{k} \cdot \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} - \frac{s_{i,j}}{k \cdot e}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta y^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} - \frac{s_{i,j}}{k \cdot e}}$$

Solução implícita da resposta transiente

Considerando que os valores de temperatura em todos os pontos são conhecidos em um passo de tempo genérico (m), a aproximação da solução para o passo seguinte de tempo ($m+1$) resulta em um sistema de equações para solução no passo $m+1$, cuja matriz de coeficientes tem um formato “penta-diagonal” simétrico:

$$\begin{bmatrix} X & X & X & & & & & & & \\ X & X & X & X & & & & & & \\ X & X & X & X & X & & & & & \\ & X & X & X & X & X & & & & \\ & & X & X & X & X & X & & & \\ & & & X & X & X & X & X & & \\ & & & & X & X & X & X & X & \\ & & & & & X & X & X & X & X \\ & & & & & & X & X & X & X \\ & & & & & & & X & X & X & X \\ & & & & & & & & X & X & X \\ & & & & & & & & & X & X & X \\ & & & & & & & & & & X & X \\ & & & & & & & & & & & X \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i-1,j}^{m+1} \\ u_{i,j-1}^{m+1} \\ u_{i,j}^{m+1} \\ u_{i,j+1}^{m+1} \\ u_{i-1,j}^{m+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ X \end{bmatrix}$$

Esse sistema pode ser resolvido por métodos diretos (eliminação de Gauss, método de Cholesky, etc.) ou por métodos iterativos. Essa solução pode ser lenta do ponto de vista computacional se a malha for muito grande. Uma alternativa é a Técnica de Direções Alternadas que vai ser mostrada a seguir.

Técnica de Direções Alternadas

Ref.: Frind, E.O., *Groundwater Modelling (Numerical Methods)*, Lecture Notes Earth 456/656, Department of Earth Sciences, University of Waterloo, 1995.

1 – Resolvendo em x (primeiro sub-passo no tempo $m+1$)

$$\frac{u_{i,j-1}^{m+1} - 2u_{i,j}^{m+1} + u_{i,j+1}^{m+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i-1,j}^m - 2u_{i,j}^m + u_{i+1,j}^m}{\Delta y^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{u_{i,j}^{m+1}}{\Delta t} - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{u_{i,j}^m}{\Delta t} - \frac{S_{i,j}^m}{k \cdot e}$$

↑
↑
↑
desconhecido considerado igual desconhecido
ao do passo anterior

$$\Rightarrow u_{i,j-1}^{m+1} - 2u_{i,j}^{m+1} + u_{i,j+1}^{m+1} - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{u_{i,j}^{m+1}}{\Delta t} \cdot \Delta x^2 = - \frac{(u_{i-1,j}^m - 2u_{i,j}^m + u_{i+1,j}^m)}{\Delta y^2} \cdot \Delta x^2 - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{u_{i,j}^m}{\Delta t} \cdot \Delta x^2 - \frac{S_{i,j}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2$$

1.1 – Solução da linha genérica ($i = 2:nr-1$)

1.1.1 – Caso geral (células do interior da linha)

Adotando $r_x = \frac{\alpha \cdot \Delta t}{\Delta x^2}$, $f_x = \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}$ e $[\times(-1)] \Rightarrow$

$$(i = 2 : nr - 1) (j = 2 : nc - 1) \rightarrow -u_{i,j-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{i,j}^{m+1} - u_{i,j+1}^{m+1} = f_x \cdot u_{i-1,j}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{i,j}^m + f_x \cdot u_{i+1,j}^m + \frac{S_{i,j}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2$$

1.1.2 – Condições de contorno no bordo esquerdo

1.1.2.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo esquerdo

$$(i = 2 : nr - 1) (j = 1) \rightarrow u_{i,1} = ul$$

1.1.2.2 – Condição de contorno de fluxo prescrita no bordo esquerdo

$$qx = -k \cdot \frac{du}{dx} \cdot n_x \rightarrow qx_{i,1} \cong -k \cdot \frac{u_{i,2} - u_{i,0}}{2\Delta x} \cdot (-1) = ql \rightarrow u_{i,0} = u_{i,2} - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

$$-u_{i,0}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{i,1}^{m+1} - u_{i,2}^{m+1} = f_x \cdot u_{i-1,1}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{i,1}^m + f_x \cdot u_{i+1,1}^m + \frac{S_{i,1}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 \Rightarrow$$

$$-\left(u_{i,2}^{m+1} - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}\right) + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{i,1}^{m+1} - u_{i,2}^{m+1} = f_x \cdot u_{i-1,1}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{i,1}^m + f_x \cdot u_{i+1,1}^m + \frac{S_{i,1}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 \Rightarrow$$

$$(i = 2 : nr - 1) (j = 1) \rightarrow \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{i,1}^{m+1} - 2u_{i,2}^{m+1} = f_x \cdot u_{i-1,1}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{i,1}^m + f_x \cdot u_{i+1,1}^m + \frac{S_{i,1}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

1.1.3 – Condições de contorno no bordo direito

1.1.3.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo direito

$$(i = 2 : nr - 1) (j = nc) \rightarrow u_{i,nc} = ur$$

1.1.3.2 – Condição de contorno de fluxo prescrita no bordo direito

$$qx = -k \cdot \frac{du}{dx} \cdot n_x \rightarrow qx_{i,nc} \cong -k \cdot \frac{u_{i,nc+1} - u_{i,nc-1}}{2\Delta x} \cdot (+1) = qr \rightarrow u_{i,nc+1} = u_{i,nc-1} - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

$$-u_{i,nc-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{i,nc}^{m+1} - u_{i,nc+1}^{m+1} = f_x \cdot u_{i-1,nc}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{i,nc}^m + f_x \cdot u_{i+1,nc}^m + \frac{S_{i,nc}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 \Rightarrow$$

$$-u_{i,nc-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{i,nc}^{m+1} - \left(u_{i,nc-1}^{m+1} - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}\right) = f_x \cdot u_{i-1,nc}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{i,nc}^m + f_x \cdot u_{i+1,nc}^m + \frac{S_{i,nc}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 \Rightarrow$$

$$(i = 2 : nr - 1) \quad (j = nc) \rightarrow -2u_{i,nc-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{i,nc}^{m+1} = f_x \cdot u_{i-1,nc}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{i,nc}^m + f_x \cdot u_{i+1,nc}^m + \frac{s_{i,nc}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

1.2 – Solução da linha inferior ($i = 1$)

1.2.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo inferior

$$(i = 1) \quad (j = 1 : nc) \rightarrow u_{1,j} = ub$$

1.2.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo inferior

$$qy = -k \cdot \frac{du}{dy} \cdot n_y \rightarrow qy_{1,j} \cong -k \cdot \frac{u_{2,j} - u_{0,j}}{2\Delta y} \cdot (-1) = qb \rightarrow u_{0,j} = u_{2,j} - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

$$-u_{1,j-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{1,j}^{m+1} - u_{1,j+1}^{m+1} = f_x \cdot u_{0,j}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{1,j}^m + f_x \cdot u_{2,j}^m + \frac{s_{1,j}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 \Rightarrow$$

$$-u_{1,j-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{1,j}^{m+1} - u_{1,j+1}^{m+1} = f_x \cdot \left(u_{2,j} - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}\right) + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{1,j}^m + f_x \cdot u_{2,j}^m + \frac{s_{1,j}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 \Rightarrow$$

$$(i = 1) \quad (j = 2 : nc - 1) \rightarrow -u_{1,j-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{1,j}^{m+1} - u_{1,j+1}^{m+1} = \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{1,j}^m + 2f_x \cdot u_{2,j}^m + \frac{s_{1,j}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qb \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

1.2.2.1 – Condições de contorno no bordo esquerdo

1.2.2.1.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo esquerdo

$$(i = 1) \quad (j = 1) \rightarrow u_{1,1} = ul$$

1.2.2.1.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo esquerdo

$$qx = -k \cdot \frac{du}{dx} \cdot n_x \rightarrow qx_{1,1} \cong -k \cdot \frac{u_{1,2} - u_{1,0}}{2\Delta x} \cdot (-1) = ql \rightarrow u_{1,0} = u_{1,2} - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

$$-u_{1,0}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{1,1}^{m+1} - u_{1,2}^{m+1} = \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{1,1}^m + 2f_x \cdot u_{2,1}^m + \frac{s_{1,1}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qb \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} \Rightarrow$$

$$-\left(u_{1,2}^{m+1} - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}\right) + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{1,1}^{m+1} - u_{1,2}^{m+1} = \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{1,1}^m + 2f_x \cdot u_{2,1}^m + \frac{s_{1,1}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qb \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} \Rightarrow$$

$$(i = 1) \quad (j = 1) \rightarrow \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{1,1}^{m+1} - 2u_{1,2}^{m+1} = \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{1,1}^m + 2f_x \cdot u_{2,1}^m + \frac{s_{1,1}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qb \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

1.2.2.2 – Condições de contorno no bordo direito

1.2.2.2.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo direito

$$(i = 1) \quad (j = nc) \rightarrow u_{1,nc} = ur$$

1.2.2.2.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo direito

$$qx = -k \cdot \frac{du}{dx} \cdot n_x \rightarrow qx_{1,nc} \cong -k \cdot \frac{u_{1,nc+1} - u_{1,nc-1}}{2\Delta x} \cdot (+1) = qr \rightarrow u_{1,nc+1} = u_{1,nc-1} - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

$$-u_{1,nc-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{1,nc}^{m+1} - u_{1,nc+1}^{m+1} = \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{1,nc}^m + 2f_x \cdot u_{2,nc}^m + \frac{s_{1,nc}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qb \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} \Rightarrow$$

$$-u_{1,nc-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{1,nc}^{m+1} - \left(u_{1,nc-1}^{m+1} - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}\right) = \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{1,nc}^m + 2f_x \cdot u_{2,nc}^m + \frac{s_{1,nc}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qb \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} \Rightarrow$$

$$(i = 1) \quad (j = nc) \rightarrow -2u_{1,nc-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{1,nc}^{m+1} = \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{1,nc}^m + 2f_x \cdot u_{2,nc}^m + \frac{s_{1,nc}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qb \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

1.3 – Solução da linha superior ($i = nr$)

1.3.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo superior

$$(i = nr) \quad (j = 1 : nc) \rightarrow u_{nr,j} = ut$$

1.3.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo superior

$$qy = -k \cdot \frac{du}{dy} \cdot n_y \rightarrow qy_{nr,j} \cong -k \cdot \frac{u_{nr+1,j} - u_{nr-1,j}}{2\Delta y} \cdot (+1) = qt \rightarrow u_{nr+1,j} = u_{nr-1,j} - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

$$-u_{nr,j-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{nr,j}^{m+1} - u_{nr,j+1}^{m+1} = f_x \cdot u_{nr-1,j}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{nr,j}^m + f_x \cdot u_{nr+1,j}^m + \frac{s_{nr,j}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 \Rightarrow$$

$$-u_{nr,j-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{nr,j}^{m+1} - u_{nr,j+1}^{m+1} = f_x \cdot u_{nr-1,j}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{nr,j}^m + f_x \cdot \left(u_{nr-1,j}^m - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}\right) + \frac{s_{nr,j}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 \Rightarrow$$

$$(i = nr) \quad (j = 2 : nc - 1) \rightarrow -u_{nr,j-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{nr,j}^{m+1} - u_{nr,j+1}^{m+1} = 2f_x \cdot u_{nr-1,j}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{nr,j}^m + \frac{s_{nr,j}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qt \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

1.3.2.1 – Condições de contorno no bordo esquerdo

1.3.2.1.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo esquerdo

$$(i = nr) \quad (j = 1) \rightarrow u_{nr,1} = ul$$

1.3.2.1.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo esquerdo

$$qx = -k \cdot \frac{du}{dx} \cdot n_x \rightarrow qx_{nr,1} \cong -k \cdot \frac{u_{nr,2} - u_{nr,0}}{2\Delta x} \cdot (-1) = ql \rightarrow u_{nr,0} = u_{nr,2} - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

$$-u_{nr,0}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{nr,1}^{m+1} - u_{nr,2}^{m+1} = 2f_x \cdot u_{nr-1,1}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{nr,1}^m + \frac{s_{nr,1}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qt \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} \Rightarrow$$

$$-\left(u_{nr,2}^{m+1} - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}\right) + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{nr,1}^{m+1} - u_{nr,2}^{m+1} = 2f_x \cdot u_{nr-1,1}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{nr,1}^m + \frac{s_{nr,1}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qt \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} \Rightarrow$$

$$(i = nr) \quad (j = 1) \rightarrow \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{nr,1}^{m+1} - 2u_{nr,2}^{m+1} = 2f_x \cdot u_{nr-1,1}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{nr,1}^m + \frac{s_{nr,1}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qt \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

1.3.2.2 – Condições de contorno no bordo direito

1.3.2.2.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo direito

$$(i = nr) \quad (j = nc) \rightarrow u_{nr,nc} = ur$$

1.3.2.2.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo direito

$$qx = -k \cdot \frac{du}{dx} \cdot n_x \rightarrow qx_{nr,nc} \cong -k \cdot \frac{u_{nr,nc+1} - u_{nr,nc-1}}{2\Delta x} \cdot (+1) = qr \rightarrow u_{nr,nc+1} = u_{nr,nc-1} - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

$$-u_{nr,nc-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{nr,nc}^{m+1} - u_{nr,nc+1}^{m+1} = 2f_x \cdot u_{nr-1,nc}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{nr,nc}^m + \frac{s_{nr,nc}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qt \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} \Rightarrow$$

$$-u_{nr,nc-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{nr,nc}^{m+1} - \left(u_{nr,nc+1}^{m+1} - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}\right) = 2f_x \cdot u_{nr-1,nc}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{nr,nc}^m + \frac{s_{nr,nc}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qt \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} \Rightarrow$$

$$(i = nr) \quad (j = nc) \rightarrow -2u_{nr,nc-1}^{m+1} + \left(2 + \frac{1}{r_x}\right) \cdot u_{nr,nc}^{m+1} = 2f_x \cdot u_{nr-1,nc}^m + \left(\frac{1}{r_x} - 2f_x\right) \cdot u_{nr,nc}^m + \frac{s_{nr,nc}^m}{k \cdot e} \cdot \Delta x^2 - qt \cdot f_x \cdot \frac{2\Delta y}{k} - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

2 – Resolvendo em y (segundo sub-passo no tempo $m+2$)

$$\frac{u_{i,j-1}^{m+1} - 2u_{i,j}^{m+1} + u_{i,j+1}^{m+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i-1,j}^{m+2} - 2u_{i,j}^{m+2} + u_{i+1,j}^{m+2}}{\Delta y^2} - \frac{u_{i,j}^{m+2}}{\alpha \cdot \Delta t} = -\frac{u_{i,j}^{m+1}}{\alpha \cdot \Delta t} - \frac{s_{i,j}^{m+1}}{k \cdot e}$$

considerado igual desconhecido desconhecido

ao do sub - passo anterior

$$\Rightarrow u_{i-1,j}^{m+2} - 2u_{i,j}^{m+2} + u_{i+1,j}^{m+2} - \frac{u_{i,j}^{m+2}}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot \Delta y^2 = -\frac{(u_{i,j-1}^{m+1} - 2u_{i,j}^{m+1} + u_{i,j+1}^{m+1})}{\Delta x^2} \cdot \Delta y^2 - \frac{u_{i,j}^{m+1}}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot \Delta y^2 - \frac{s_{i,j}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2$$

2.1 – Solução da coluna genérica ($j = 2:nc-1$)

2.1.1 – Caso geral (células do interior da coluna)

Adotando $r_y = \frac{\alpha \cdot \Delta t}{\Delta y^2}$, $f_y = \frac{1}{f_x} = \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}$ e $[x(-1)] \Rightarrow$

$$(i = 2 : nr - 1) (j = 2 : nc - 1) \rightarrow -u_{i-1,j}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{i,j}^{m+2} - u_{i+1,j}^{m+2} = f_y \cdot u_{i,j-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{i,j}^{m+1} + f_y \cdot u_{i,j+1}^{m+1} + \frac{s_{i,j}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2$$

2.1.2 – Condições de contorno no bordo inferior

2.1.2.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo inferior

$$(i = 1) (j = 2 : nc - 1) \rightarrow u_{1,j} = ub$$

2.1.2.2 – Condição de contorno de fluxo prescrita no bordo inferior

$$qy = -k \cdot \frac{du}{dy} \cdot n_y \rightarrow qy_{1,j} \cong -k \cdot \frac{u_{2,j} - u_{0,j}}{2\Delta y} \cdot (-1) = qb \rightarrow u_{0,j} = u_{2,j} - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

$$-u_{0,j}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{1,j}^{m+2} - u_{2,j}^{m+2} = f_y \cdot u_{1,j-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{1,j}^{m+1} + f_y \cdot u_{1,j+1}^{m+1} + \frac{s_{1,j}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 \Rightarrow$$

$$-\left(u_{2,j}^{m+2} - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}\right) + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{1,j}^{m+2} - u_{2,j}^{m+2} = f_y \cdot u_{1,j-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{1,j}^{m+1} + f_y \cdot u_{1,j+1}^{m+1} + \frac{s_{1,j}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 \Rightarrow$$

$$(i = 1) (j = 2 : nc - 1) \rightarrow \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{1,j}^{m+2} - 2u_{2,j}^{m+2} = f_y \cdot u_{1,j-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{1,j}^{m+1} + f_y \cdot u_{1,j+1}^{m+1} + \frac{s_{1,j}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

2.1.3 – Condições de contorno no bordo superior

2.1.3.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo superior

$$(i = nr) (j = 2 : nc - 1) \rightarrow u_{nr,j} = ut$$

2.1.3.2 – Condição de contorno de fluxo prescrita no bordo superior

$$qy = -k \cdot \frac{du}{dy} \cdot n_y \rightarrow qy_{nr,j} \cong -k \cdot \frac{u_{nr+1,j} - u_{nr-1,j}}{2\Delta y} \cdot (+1) = qt \rightarrow u_{nr+1,j} = u_{nr-1,j} - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

$$-u_{nr-1,j}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{nr,j}^{m+2} - u_{nr+1,j}^{m+2} = f_y \cdot u_{nr,j-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{nr,j}^{m+1} + f_y \cdot u_{nr,j+1}^{m+1} + \frac{s_{nr,j}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 \Rightarrow$$

$$-u_{nr-1,j}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{nr,j}^{m+2} - \left(u_{nr-1,j}^{m+2} - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}\right) = f_y \cdot u_{nr,j-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{nr,j}^{m+1} + f_y \cdot u_{nr,j+1}^{m+1} + \frac{s_{nr,j}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 \Rightarrow$$

$$(i = nr) (j = 2 : nc - 1) \rightarrow -2u_{nr-1,j}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{nr,j}^{m+2} = f_y \cdot u_{nr,j-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{nr,j}^{m+1} + f_y \cdot u_{nr,j+1}^{m+1} + \frac{s_{nr,j}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

2.2 – Solução da coluna da esquerda ($j = 1$)

2.2.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo esquerdo

$$(i = 1 : nr) \quad (j = 1) \rightarrow u_{i,1} = ul$$

2.2.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo esquerdo

$$qx = -k \cdot \frac{du}{dx} \cdot n_x \rightarrow qx_{i,1} \cong -k \cdot \frac{u_{i,2} - u_{i,0}}{2\Delta x} \cdot (-1) = ql \rightarrow u_{i,0} = u_{i,2} - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

$$-u_{i-1,1}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{i,1}^{m+2} - u_{i+1,1}^{m+2} = f_y \cdot u_{i,0}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{i,1}^{m+1} + f_y \cdot u_{i,2}^{m+1} + \frac{S_{i,1}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 \Rightarrow$$

$$-u_{i-1,1}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{i,1}^{m+2} - u_{i+1,1}^{m+2} = f_y \cdot \left(u_{i,2}^{m+1} - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}\right) + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{i,1}^{m+1} + f_y \cdot u_{i,2}^{m+1} + \frac{S_{i,1}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 \Rightarrow$$

$$(i = 2 : nr - 1) \quad (j = 1) \rightarrow -u_{i-1,1}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{i,1}^{m+2} - u_{i+1,1}^{m+2} = \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{i,1}^{m+1} + 2f_y \cdot u_{i,2}^{m+1} + \frac{S_{i,1}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - ql \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

2.2.2.1 – Condições de contorno no bordo inferior

2.2.2.1.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo inferior

$$(i = 1) \quad (j = 1) \rightarrow u_{1,1} = ub$$

2.2.2.1.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo inferior

$$qy = -k \cdot \frac{du}{dy} \cdot n_y \rightarrow qy_{1,1} \cong -k \cdot \frac{u_{2,1} - u_{0,1}}{2\Delta y} \cdot (-1) = qb \rightarrow u_{0,1} = u_{2,1} - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

$$-u_{0,1}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{1,1}^{m+2} - u_{2,1}^{m+2} = \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{1,1}^{m+1} + 2f_y \cdot u_{1,2}^{m+1} + \frac{S_{1,1}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - ql \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} \Rightarrow$$

$$-\left(u_{2,1}^{m+2} - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}\right) + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{1,1}^{m+2} - u_{2,1}^{m+2} = \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{1,1}^{m+1} + 2f_y \cdot u_{1,2}^{m+1} + \frac{S_{1,1}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - ql \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} \Rightarrow$$

$$(i = 1) \quad (j = 1) \rightarrow \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{1,1}^{m+2} - 2u_{2,1}^{m+2} = \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{1,1}^{m+1} + 2f_y \cdot u_{1,2}^{m+1} + \frac{S_{1,1}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - ql \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

2.2.2.2 – Condições de contorno no bordo superior

2.2.2.2.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo superior

$$(i = nr) \quad (j = 1) \rightarrow u_{nr,1} = ut$$

2.2.2.2.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo superior

$$qy = -k \cdot \frac{du}{dy} \cdot n_y \rightarrow qy_{nr,1} \cong -k \cdot \frac{u_{nr+1,1} - u_{nr-1,1}}{2\Delta y} \cdot (+1) = qt \rightarrow u_{nr+1,1} = u_{nr-1,1} - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

$$-u_{nr-1,1}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{nr,1}^{m+2} - u_{nr+1,1}^{m+2} = \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{nr,1}^{m+1} + 2f_y \cdot u_{nr,2}^{m+1} + \frac{S_{nr,1}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - ql \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} \Rightarrow$$

$$-u_{nr-1,1}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{nr,1}^{m+2} - \left(u_{nr-1,1}^{m+2} - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}\right) = \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{nr,1}^{m+1} + 2f_y \cdot u_{nr,2}^{m+1} + \frac{S_{nr,1}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - ql \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} \Rightarrow$$

$$(i = nr) \quad (j = 1) \rightarrow -2u_{nr-1,1}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{nr,1}^{m+2} = \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{nr,1}^{m+1} + 2f_y \cdot u_{nr,2}^{m+1} + \frac{S_{nr,1}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - ql \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

2.3 – Solução da coluna da direita ($j = nc$)

2.3.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo direito

$$(i = 1 : nr) \quad (j = nc) \rightarrow u_{i,nc} = ur$$

2.3.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo direito

$$qx = -k \cdot \frac{du}{dx} \cdot n_x \rightarrow qx_{i,nc} \cong -k \cdot \frac{u_{i,nc+1} - u_{i,nc-1}}{2\Delta x} \cdot (+1) = qr \rightarrow u_{i,nc+1} = u_{i,nc-1} - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

$$-u_{i-1,nc}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{i,nc}^{m+2} - u_{i+1,nc}^{m+2} = f_y \cdot u_{i,nc-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{i,nc}^{m+1} + f_y \cdot u_{i,nc+1}^{m+1} + \frac{S_{i,nc}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 \Rightarrow$$

$$-u_{i-1,nc}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{i,nc}^{m+2} - u_{i+1,nc}^{m+2} = f_y \cdot u_{i,nc-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{i,nc}^{m+1} + f_y \cdot \left(u_{i,nc-1}^{m+1} - qr \cdot \frac{2\Delta x}{k}\right) + \frac{S_{i,nc}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 \Rightarrow$$

$$(i = 2 : nr - 1) \quad (j = nc) \rightarrow -u_{i-1,nc}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{i,nc}^{m+2} - u_{i+1,nc}^{m+2} = 2f_y \cdot u_{i,nc-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{i,nc}^{m+1} + \frac{S_{i,nc}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - qr \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

2.3.2.1 – Condições de contorno no bordo inferior

2.3.2.1.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo inferior

$$(i = 1) \quad (j = nc) \rightarrow u_{1,nc} = ub$$

2.3.2.1.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo inferior

$$qy = -k \cdot \frac{du}{dy} \cdot n_y \rightarrow qy_{1,nc} \cong -k \cdot \frac{u_{2,nc} - u_{0,nc}}{2\Delta y} \cdot (-1) = qb \rightarrow u_{0,nc} = u_{2,nc} - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

$$-u_{0,nc}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{1,nc}^{m+2} - u_{2,nc}^{m+2} = 2f_y \cdot u_{1,nc-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{1,nc}^{m+1} + \frac{S_{1,nc}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - qr \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} \Rightarrow$$

$$-\left(u_{2,nc}^{m+2} - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}\right) + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{1,nc}^{m+2} - u_{2,nc}^{m+2} = 2f_y \cdot u_{1,nc-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{1,nc}^{m+1} + \frac{S_{1,nc}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - qr \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} \Rightarrow$$

$$(i = 1) \quad (j = nc) \rightarrow \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{1,nc}^{m+2} - 2u_{2,nc}^{m+2} = 2f_y \cdot u_{1,nc-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{1,nc}^{m+1} + \frac{S_{1,nc}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - qr \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} - qb \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

2.3.2.2 – Condições de contorno no bordo superior

2.3.2.2.1 – Condição de contorno de carga hidráulica prescrita no bordo superior

$$(i = nr) \quad (j = nc) \rightarrow u_{nr,nc} = ut$$

2.3.2.2.2 – Condição de contorno de fluxo prescrito no bordo superior

$$qy = -k \cdot \frac{du}{dy} \cdot n_y \rightarrow qy_{nr,nc} \cong -k \cdot \frac{u_{nr+1,nc} - u_{nr-1,nc}}{2\Delta y} \cdot (+1) = qt \rightarrow u_{nr+1,nc} = u_{nr-1,nc} - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$

$$-u_{nr-1,nc}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{nr,nc}^{m+2} - u_{nr+1,nc}^{m+2} = 2f_y \cdot u_{nr,nc-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{nr,nc}^{m+1} + \frac{S_{nr,nc}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - qr \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} \Rightarrow$$

$$-u_{nr-1,nc}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{nr,nc}^{m+2} - \left(u_{nr+1,nc}^{m+2} - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}\right) = 2f_y \cdot u_{nr,nc-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{nr,nc}^{m+1} + \frac{S_{nr,nc}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - qr \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} \Rightarrow$$

$$(i = nr) \quad (j = nc) \rightarrow -2u_{nr-1,nc}^{m+2} + \left(2 + \frac{1}{r_y}\right) \cdot u_{nr,nc}^{m+2} = 2f_y \cdot u_{nr,nc-1}^{m+1} + \left(\frac{1}{r_y} - 2f_y\right) \cdot u_{nr,nc}^{m+1} + \frac{S_{nr,nc}^{m+1}}{k \cdot e} \cdot \Delta y^2 - qr \cdot f_y \cdot \frac{2\Delta x}{k} - qt \cdot \frac{2\Delta y}{k}$$