

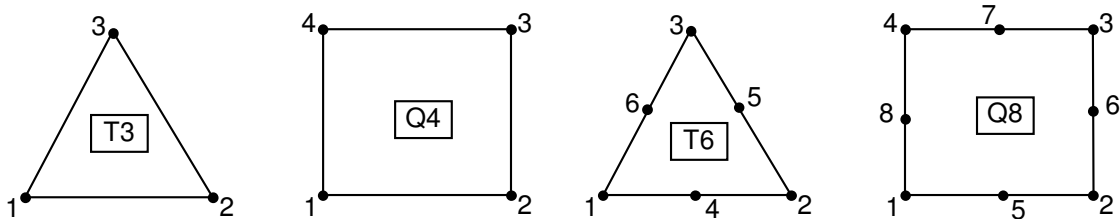
**Primeiro Trabalho – Programação em C:
Implementação de elementos finitos isoparamétricos**

O objetivo deste trabalho é implementar funções básicas de uma família de quatro elementos finitos isoparamétricos planos de continuidade C^0 .

A família de elementos a ser implementada é:

<u>Elemento</u>	<u>Forma</u>	<u>Nº de nós</u>	<u>Tipo de interpolação</u>
T3	triângulo	3	Linear
Q4	quadrilátero	4	Linear
T6	triângulo	6	Quadrática
Q8	quadrilátero	8	Quadrática

Numeração local dos nós dos elementos:



Etapa 1

Os elementos finitos são caracterizados pelas chamadas funções de forma, que definem a interpolação do campo fundamental (deslocamentos, por exemplo) dentro do elemento. O objetivo desta etapa do trabalho é escrever funções em C que avaliam as funções de forma dos elementos implementados em um ponto qualquer no seu interior e definido pelos valores de suas coordenadas paramétricas (r, s):

- (a) *shpT3Shape*: Esta função avalia as funções de forma de um elemento triangular linear (T3). São dadas as coordenadas paramétricas r e s correspondentes ao ponto de avaliação. As duas coordenadas paramétricas correspondem às duas primeiras coordenadas de área triangulares que definem a posição do ponto de avaliação. Os valores das três funções de forma avaliadas no ponto dado são retornados no vetor *shape*.

```
void shpT3Shape( double r, double s, double shape[ ] );
```

- (b) *shpQ4Shape*: Esta função avalia as funções de forma de um elemento quadrilátero bilinear (Q4). São dadas as coordenadas paramétricas r e s correspondentes ao ponto de avaliação. Os valores das quatro funções de forma avaliadas no ponto dado são retornados no vetor *shape*.

```
void shpQ4Shape( double r, double s, double shape[ ] );
```

- (c) *shpT6Shape*: Esta função avalia as funções de forma de um elemento triangular quadrático (T6). São dadas as coordenadas paramétricas r e s correspondentes ao ponto de avaliação. As duas coordenadas paramétricas correspondem às duas primeiras coordenadas de área triangulares que definem a posição do ponto de avaliação. Os valores das seis funções de forma avaliadas no ponto dado são retornados no vetor *shape*.

```
void GetT6Shape( double r, double s, double shape[ ] );
```

- (d) *shpQ8Shape*: Esta função avalia as funções de forma de um elemento quadrilátero quadrático (Q8). São dadas as coordenadas paramétricas r e s correspondentes ao ponto de avaliação. Os valores das oito funções de forma avaliadas no ponto dado são retornados no vetor *shape*.

```
void shpQ8Shape( double r, double s, double shape[ ] );
```

Etapa 2

Na formulação de um determinado elemento finito isoparamétrico é necessário avaliar as derivadas das funções de forma do elemento em relação às coordenadas paramétricas que as descrevem. O objetivo desta etapa é escrever funções para avaliar as derivadas das funções de forma em relação às suas coordenadas paramétricas para os quatro tipos de elementos finitos planos. É definida uma estrutura em C que serve para declarar variáveis que armazenam os dois valores das derivadas de uma função de forma em relação a cada uma das coordenadas paramétricas (r , s):

```
typedef struct _derivnat {  
    double r;  
    double s;  
} DerivNat;
```

(e) *shpT3Deriv*: Esta função avalia as derivadas das funções de forma de um elemento triangular linear (T3). São dadas as coordenadas paramétricas r e s correspondentes ao ponto de avaliação. As duas coordenadas paramétricas correspondem às duas primeiras coordenadas de área triangulares que definem a posição do ponto de avaliação. Os valores das derivadas das três funções de forma avaliadas no ponto dado são retornados no vetor *deriv*.

```
void shpT3Deriv( double r, double s, DerivNat deriv[] );
```

(f) *shpQ4Deriv*: Esta função avalia as derivadas das funções de forma de um elemento quadrilátero bilinear (Q4). São dadas as coordenadas paramétricas r e s correspondentes ao ponto de avaliação. Os valores das derivadas das quatro funções de forma avaliadas no ponto dado são retornados no vetor *deriv*.

```
void shpQ4Deriv( double r, double s, DerivNat deriv[] );
```

(g) *shpT6Deriv*: Esta função avalia as derivadas das funções de forma de um elemento triangular quadrático (T6). São dadas as coordenadas paramétricas r e s correspondentes ao ponto de avaliação. As duas coordenadas paramétricas correspondem às duas primeiras coordenadas de área triangulares que definem a posição do ponto de avaliação. Os valores das derivadas das seis funções de forma avaliadas no ponto dado são retornados no vetor *deriv*.

```
void shpT6Deriv( double r, double s, DerivNat deriv[] );
```

(f) *shpQ8Deriv*: Esta função avalia as derivadas das funções de forma de um elemento quadrilátero quadrático (Q8). São dadas as coordenadas paramétricas r e s correspondentes ao ponto de avaliação. Os valores das derivadas das oito funções de forma avaliadas no ponto dado são retornados no vetor *deriv*.

```
void shpQ8Deriv( double r, double s, DerivNat deriv[] );
```

Etapa 3

Na formulação isoparamétrica do método dos elementos finitos a distorção de forma de um elemento fica caracterizada por um tensor chamado de Jacobiano, que no caso bidimensional é representado por uma matriz 2x2 que pode ser avaliada em qualquer ponto no interior de um elemento:

$$[J] = \begin{bmatrix} \partial x / \partial r & \partial y / \partial r \\ \partial x / \partial s & \partial y / \partial s \end{bmatrix}$$

O determinante da matriz do Jacobiano, $|J|$, é um fator de escala de área para o mapeamento que leva do espaço paramétrico para o espaço cartesiano. O valor de $|J|$ é uma medida da distorção do elemento finito em um determinado ponto. Valores negativos ou nulo de $|J|$ indicam que existe uma distorção exagerada do elemento finito. O objetivo desta etapa do trabalho é escrever uma função que avalie a matriz do Jacobiano e seu determinante para um elemento finito isoparamétrico bidimensional, sendo dadas as coordenadas cartesianas dos nós do elemento e as derivadas das funções de forma em relação às coordenadas paramétricas avaliadas em um ponto qualquer.

Pede-se então escrever a função *shpElemJacobian* abaixo, que serve para calcular o Jacobiano de qualquer elemento finito isoparamétrico plano (continuidade C^0). É definida uma estrutura em C que serve para declarar variáveis que armazenam os dois valores das coordenadas de um nó no espaço cartesiano bidimensional:

```
typedef struct _point2 {  
    double x;  
    double y;  
} Point2;
```

(g) *shpElemJacobian*: Esta função calcula a matriz do Jacobiano e seu determinante para um elemento finito isoparamétrico plano, sendo dadas as coordenadas cartesianas dos nós do elemento e as derivadas das funções de forma em relação às coordenadas paramétricas avaliadas em um ponto qualquer. A matriz do Jacobiano é retornada no último argumento da função e o seu valor de retorno é o determinante do Jacobiano.

```
double shpElemJacobian( int num_nodes,  
                        Point2 node_coords[],  
                        DerivNat deriv[],  
                        double jacobian[2][2] );
```

Etapa 4

Esta etapa consiste em escrever as funções que utilizam as funções desenvolvidas nas etapas anteriores. Nesta etapa será escrito um módulo que gerencia um elemento finito por vez. Serão escritas funções para ler os dados de um elemento finito de um arquivo, para salvar os dados do elemento finito corrente em um arquivo, para avaliar a posição de um ponto dentro do elemento, sendo dadas as suas coordenadas paramétricas, e para avaliar o determinante do Jacobiano em um ponto.

Fornecido e Pedido

Os arquivos para execução do trabalho estão disponíveis dentro de um arquivo comprimido (*civ2801trab1vc6.zip*), que está disponível no *site* da disciplina na *web*. São fornecidos os seguintes arquivos do programa:

```
drv.c      (Driver: funções que controlam o programa)  
elm.c      (elm: módulo de elemento finito)  
elm.h  
shp.c      (shp: módulo de funções de forma e jacobiano)  
shp.h
```

Os arquivos *elm.c* e *shp.c* estão incompletos. O trabalho consiste em complementar estes arquivos conforme indicado dentro do código. O entendimento do código existente nestes arquivos é considerado parte do trabalho. Também são fornecidos arquivos contendo dados de um elemento finito para serem lidos pelo programa. Pede-se também, em papel, somente as linhas que foram adicionadas nos arquivos. Estas linhas devem ser indicadas da seguinte forma:

COMPLETE AQUI: XX
LINHAS ADICIONADAS

Anexo

Expressões analíticas das funções de forma dos elementos considerados e de suas derivadas parciais em relação às coordenadas paramétricas.

FUNÇÕES DE FORMA DE ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS PLANOS E SUAS DERIVADAS

Elemento Finito T3

Funções de Forma (em coordenadas paramétricas r e s):

$$L1(r, s) := r$$

$$L2(r, s) := s$$

$$L3(r, s) := 1 - r - s$$

$$N1(r, s) := L1(r, s)$$

$$N2(r, s) := L2(r, s)$$

$$N3(r, s) := L3(r, s)$$

Derivadas das funções de forma em relação às coordenadas paramétricas:

$$\frac{d}{dr}N1(r, s) \rightarrow 1$$

$$\frac{d}{ds}N1(r, s) \rightarrow 0$$

$$\frac{d}{dr}N2(r, s) \rightarrow 0$$

$$\frac{d}{ds}N2(r, s) \rightarrow 1$$

$$\frac{d}{dr}N3(r, s) \rightarrow -1$$

$$\frac{d}{ds}N3(r, s) \rightarrow -1$$

Elemento Finito Q4

Funções de Forma (em coordenadas paramétricas r e s):

$$N1(r, s) := \frac{1}{4} \cdot (1 - r) \cdot (1 - s)$$

$$N3(r, s) := \frac{1}{4} \cdot (1 + r) \cdot (1 + s)$$

$$N2(r, s) := \frac{1}{4} \cdot (1 + r) \cdot (1 - s)$$

$$N4(r, s) := \frac{1}{4} \cdot (1 - r) \cdot (1 + s)$$

Derivadas das funções de forma em relação às coordenadas paramétricas:

$$\frac{d}{dr}N1(r, s) \rightarrow \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} \cdot s$$

$$\frac{d}{ds}N1(r, s) \rightarrow \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} \cdot r$$

$$\frac{d}{dr}N2(r, s) \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot s$$

$$\frac{d}{ds}N2(r, s) \rightarrow \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} \cdot r$$

$$\frac{d}{dr}N3(r, s) \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot s$$

$$\frac{d}{ds}N3(r, s) \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot r$$

$$\frac{d}{dr}N4(r, s) \rightarrow \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} \cdot s$$

$$\frac{d}{ds}N4(r, s) \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot r$$

Elemento Finito T6

Funções de Forma (em coordenadas paramétricas r e s):

$$L1(r, s) := r$$

$$L2(r, s) := s$$

$$L3(r, s) := 1 - r - s$$

$$N1(r, s) := L1(r, s) \cdot (2 \cdot L1(r, s) - 1)$$

$$N2(r, s) := L2(r, s) \cdot (2 \cdot L2(r, s) - 1)$$

$$N3(r, s) := L3(r, s) \cdot (2 \cdot L3(r, s) - 1)$$

$$N4(r, s) := 4 \cdot L1(r, s) \cdot L2(r, s)$$

$$N5(r, s) := 4 \cdot L2(r, s) \cdot L3(r, s)$$

$$N6(r, s) := 4 \cdot L3(r, s) \cdot L1(r, s)$$

Derivadas das funções de forma em relação às coordenadas paramétricas:

$$\frac{d}{dr} N1(r, s) \rightarrow 4 \cdot r - 1$$

$$\frac{d}{ds} N1(r, s) \rightarrow 0$$

$$\frac{d}{dr} N2(r, s) \rightarrow 0$$

$$\frac{d}{ds} N2(r, s) \rightarrow 4 \cdot s - 1$$

$$\frac{d}{dr} N3(r, s) \rightarrow -3 + 4 \cdot r + 4 \cdot s$$

$$\frac{d}{ds} N3(r, s) \rightarrow -3 + 4 \cdot r + 4 \cdot s$$

$$\frac{d}{dr} N4(r, s) \rightarrow 4 \cdot s$$

$$\frac{d}{ds} N4(r, s) \rightarrow 4 \cdot r$$

$$\frac{d}{dr} N5(r, s) \rightarrow -4 \cdot s$$

$$\frac{d}{ds} N5(r, s) \rightarrow 4 - 4 \cdot r - 8 \cdot s$$

$$\frac{d}{dr} N6(r, s) \rightarrow -8 \cdot r + 4 - 4 \cdot s$$

$$\frac{d}{ds} N6(r, s) \rightarrow -4 \cdot r$$

Elemento Finito Q8

Funções de Forma (em coordenadas paramétricas r e s):

$$N5(r, s) := \frac{1}{2} \cdot (1 - r^2) \cdot (1 - s)$$

$$N7(r, s) := \frac{1}{2} \cdot (1 - r^2) \cdot (1 + s)$$

$$N6(r, s) := \frac{1}{2} \cdot (1 - s^2) \cdot (1 + r)$$

$$N8(r, s) := \frac{1}{2} \cdot (1 - s^2) \cdot (1 - r)$$

$$N1(r, s) := \frac{1}{4} \cdot (1 - r) \cdot (1 - s) - \frac{1}{2} \cdot N8(r, s) - \frac{1}{2} \cdot N5(r, s)$$

$$N3(r, s) := \frac{1}{4} \cdot (1 + r) \cdot (1 + s) - \frac{1}{2} \cdot N6(r, s) - \frac{1}{2} \cdot N7(r, s)$$

$$N2(r, s) := \frac{1}{4} \cdot (1 + r) \cdot (1 - s) - \frac{1}{2} \cdot N5(r, s) - \frac{1}{2} \cdot N6(r, s)$$

$$N4(r, s) := \frac{1}{4} \cdot (1 - r) \cdot (1 + s) - \frac{1}{2} \cdot N7(r, s) - \frac{1}{2} \cdot N8(r, s)$$

Derivadas das funções de forma em relação às coordenadas paramétricas:

$$\frac{d}{dr} N1(r, s) \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot s - \frac{1}{4} \cdot s^2 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot (1 - s)$$

$$\frac{d}{ds} N1(r, s) \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot r + \frac{1}{2} \cdot s \cdot (1 - r) - \frac{1}{4} \cdot r^2$$

$$\frac{d}{dr} N2(r, s) \Rightarrow \frac{-1}{4} \cdot s + \frac{1}{2} \cdot r \cdot (1 - s) + \frac{1}{4} \cdot s^2$$

$$\frac{d}{ds} N2(r, s) \Rightarrow \frac{-1}{4} \cdot r - \frac{1}{4} \cdot r^2 + \frac{1}{2} \cdot s \cdot (1 + r)$$

$$\frac{d}{dr} N3(r, s) \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot s + \frac{1}{4} \cdot s^2 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot (1 + s)$$

$$\frac{d}{ds} N3(r, s) \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot r + \frac{1}{2} \cdot s \cdot (1 + r) + \frac{1}{4} \cdot r^2$$

$$\frac{d}{dr} N4(r, s) \Rightarrow \frac{-1}{4} \cdot s + \frac{1}{2} \cdot r \cdot (1 + s) - \frac{1}{4} \cdot s^2$$

$$\frac{d}{ds} N4(r, s) \Rightarrow \frac{-1}{4} \cdot r + \frac{1}{4} \cdot r^2 + \frac{1}{2} \cdot s \cdot (1 - r)$$

$$\frac{d}{dr} N5(r, s) \Rightarrow -r \cdot (1 - s)$$

$$\frac{d}{ds} N5(r, s) \Rightarrow \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \cdot r^2$$

$$\frac{d}{dr} N6(r, s) \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot s^2$$

$$\frac{d}{ds} N6(r, s) \Rightarrow -s \cdot (1 + r)$$

$$\frac{d}{dr} N7(r, s) \Rightarrow -r \cdot (1 + s)$$

$$\frac{d}{ds} N7(r, s) \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot r^2$$

$$\frac{d}{dr} N8(r, s) \Rightarrow \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \cdot s^2$$

$$\frac{d}{ds} N8(r, s) \Rightarrow -s \cdot (1 - r)$$