CIV 2802 – Sistemas Gráficos para Engenharia – 2008.1

Luiz Fernando Martha

Condutividade Térmica 1D – Método das Diferenças Finitas

Parâmetros do modelo

$u \to$ temperatura [°C]
$k \to$ condutividade térmica (considerado meio homegêneo) [W/(m °C)]
$\rho \to$ densidade do material (massa específica) [kg/m³]
$C_P \to$ calor específico [J/kg °C]
$\alpha = \dfrac{k}{\rho \cdot C_P} \to$ difusividade térmica [m²/s]
$A \to$ área da seção transversal da barra [m²]
$L \to$ comprimento da barra [m]

Lei de Fourier

(fluxo térmico é taxa de energia por unidade de área)
$q = -k \cdot du/dx \to$ fluxo térmico [W/m²]

Parâmetros da malha

$\Delta x \to$ tamanho do lado da célula [m]
$n \to$ número de pontos da malha

Condições de contorno

$u(x{=}0) = ul \to$ temperatura constante prescrita no bordo esquerdo
ou
$q(x{=}0) = ql \to$ fluxo de calor radiativo constante prescrito no bordo esquerdo

$u(x{=}L) = ur \to$ temperatura constante prescrita no bordo direito
ou
$q(x{=}Lx) = qr \to$ fluxo de calor radiativo constante no bordo direito

Fonte de calor

$s \to$ fonte de calor uniformemente distribuída por comprimento de barra [W/m]

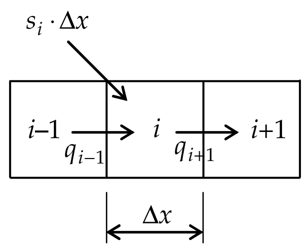
Balanço de energia térmica em uma célula da malha:

(a célula é um volume de controle; convenção: calor que entra na célula é positivo)

[*Taxa com que energia entra na célula*] + [*Taxa de geração de energia dentro da célula (considerada nula)*] =
[*Taxa com que energia sai da célula*] + [*Taxa de armazenamento de energia dentro da célula*]

$$[q_{i-1} \cdot A + s_i \cdot \Delta x] + [0] = [q_{i+1} \cdot A] + \left[\rho \cdot C_P \cdot \Delta x \cdot A \cdot \frac{\partial u}{\partial t}\right]$$

$$q_{i-1} \cdot A - q_{i+1} \cdot A = \rho \cdot C_P \cdot \Delta x \cdot A \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - s_i \cdot \Delta x$$



Usando a Lei de Fourier e a aproximação de derivada em diferenças finitas:
$(q \cong -k \cdot \Delta u / \Delta x)$

$$\left(-k \cdot A \cdot \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}\right) - \left(-k \cdot A \cdot \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}\right) = \rho \cdot C_P \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot A - s_i \cdot \Delta x$$

$$[\times 1/(\Delta x \cdot k \cdot A)] \;\Rightarrow\; \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = \frac{\rho \cdot C_P}{k} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{s_i}{k \cdot A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{s_i}{k \cdot A}}$$

Solução explícita da resposta transiente:

Considerando que os valores de temperatura em todos os pontos são conhecidos em um passo de tempo genérico (m), a aproximação da resposta para o passo seguinte de tempo (m+1) na solução explícita é tal que cada valor u_i^{m+1} só depende de valores do passo anterior. Isso resulta em:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\Delta t} \;\Rightarrow\; -\frac{u_i^{m+1}}{\alpha \cdot \Delta t} = -\frac{u_{i-1}^m - 2u_i^m + u_{i+1}^m}{\Delta x^2} - \frac{u_i^m}{\alpha \cdot \Delta t} - \frac{s_i^m}{k \cdot A}$$

$$[\times(-\alpha \cdot \Delta t)] \;\Rightarrow\; (i = 2:n-1) \;\rightarrow\; u_i^{m+1} = u_i^m + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \cdot \left(u_{i-1}^m - 2u_i^m + u_{i+1}^m\right) + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{k \cdot A} \cdot s_i^m$$

Sendo $\boxed{r = \frac{\alpha \cdot \Delta t}{\Delta x^2}}$ $\;\Rightarrow\; (i = 2:n-1) \;\rightarrow\; \boxed{u_i^{m+1} = r \cdot u_{i-1}^m + (1-2r) \cdot u_i^m + r \cdot u_{i+1}^m + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{k \cdot A} \cdot s_i^m}$

Uma questão importante que aparece é quanto aos valores de Δx e Δt [1]. Eles podem ser escolhidos independentemente? Para responder esta pergunta, considere uma situação em que $\Delta t >> \Delta x$, fazendo com r tenha um valor grande e $(1 - 2r)$ negativo. O valor de u_i^{m+1} passaria a depender negativamente de u_i^m e positivamente dos dois valores visinhos. Isso resulta em uma solução oscilatória da equação acima. Para evitar essa situação, e como $r > 0$ sempre, é preciso manter $(1 - 2r) > 0$. Além disso, quanto r = ½, o valor de u_i no novo passo de tempo não receberia influência do valor no mesmo ponto no passo de tempo anterior, mas somente dos dois pontos visinhos, o que é uma situação não realista fisicamente. Portanto, na solução explícita existe um requisito para a estabilidade numérica do processo:

$$\boxed{r = \frac{\alpha \cdot \Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}}$$

Esse requisito, dado que em geral o incremento Δx da discretização do domínio é estabelecido *a priori*, estabelece um limite para o valor do incremento de tempo Δt .

Condições de contorno do tipo Dirichlet

$(i = 1) \;\rightarrow\; \boxed{u_1 = ul}$

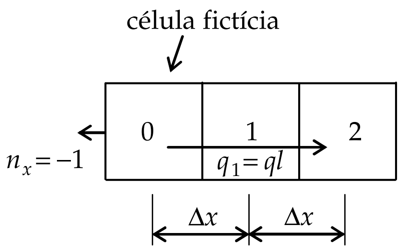
$(i = n) \;\rightarrow\; \boxed{u_n = ur}$

Condições de contorno do tipo Neuman

$(i = 1)$:

$$q = -k \cdot \frac{du}{dx} \cdot n_x \;\rightarrow\; q_1 \cong -k \cdot \frac{u_2 - u_0}{2\Delta x} \cdot (-1) = ql \;\rightarrow\; u_0 = u_2 - ql \cdot \frac{2\Delta x}{k}$$

$$u_1^{m+1} = r \cdot u_0^m + (1-2r) \cdot u_1^m + r \cdot u_2^m + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{k \cdot A} \cdot s_1^m \;\Rightarrow$$



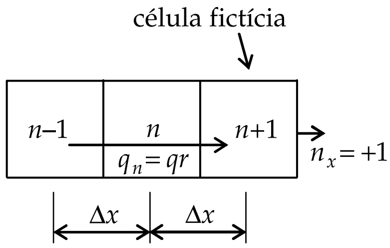
$$(i = 1) \;\rightarrow\; \boxed{u_1^{m+1} = (1-2r) \cdot u_1^m + 2r \cdot u_2^m + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{k \cdot A} \cdot s_1^m - ql \cdot \frac{r \cdot 2\Delta x}{k}}$$

[1] Ref.: Frind, E.O., *Groundwater Modelling (Numerical Methods)*, Lecture Notes Earth 456/656, Department of Earth Sciences, University of Waterloo, 1995.

$(i=n)$:

$$q=-k\cdot\frac{du}{dx}\cdot n_x \;\rightarrow\; q_n \cong -k\cdot\frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2\Delta x}\cdot(+1)=qr \;\rightarrow\; u_{n+1}=u_{n-1}-qr\cdot\frac{2\Delta x}{k}$$

$$u_n^{m+1}=r\cdot u_{n-1}^m+(1-2r)\cdot u_n^m+r\cdot u_{n+1}^m+\frac{\alpha\cdot\Delta t}{k\cdot A}\cdot s_n^m \quad\Rightarrow$$



$$(i=n)\;\rightarrow\;\boxed{u_n^{m+1}=2r\cdot u_{n-1}^m+(1-2r)\cdot u_n^m+\frac{\alpha\cdot\Delta t}{k\cdot A}\cdot s_n^m-qr\cdot\frac{r\cdot 2\Delta x}{k}}$$

Solução implícita da resposta transiente: Método de Crank-Nicolson

A aproximação em diferenças finitas da segunda derivada da temperatura em relação a x é considerada como uma média de valores calculados no passo de tempo (m) e no passo seguinte de tempo (m+1):

$$\frac{1}{2}\left[\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{\Delta x^2}\right]^m+\frac{1}{2}\left[\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{\Delta x^2}\right]^{m+1}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{u_i^{m+1}-u_i^m}{\Delta t}-\frac{s_i^m}{k\cdot A} \quad\rightarrow$$

$$\left[\times\Delta x^2\right]\;\Rightarrow\quad \frac{u_{i-1}^{m+1}-2u_i^{m+1}+u_{i+1}^{m+1}}{2}-\frac{u_i^{m+1}}{\alpha\cdot\Delta t}\cdot\Delta x^2=-\frac{u_{i-1}^m-2u_i^m+u_{i+1}^m}{2}-\frac{u_i^m}{\alpha\cdot\Delta t}\cdot\Delta x^2-\frac{s_i^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2$$

$$r=\frac{\alpha\cdot\Delta t}{\Delta x^2}\quad\Rightarrow\quad (i=2:n-1)\;\rightarrow\;\boxed{-u_{i-1}^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)u_i^{m+1}-u_{i+1}^{m+1}=u_{i-1}^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)u_i^m+u_{i+1}^m+2\frac{s_i^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2}$$

Condições de contorno do tipo Dirichlet

$$(i=1)\;\rightarrow\;\boxed{u_1=ul}$$

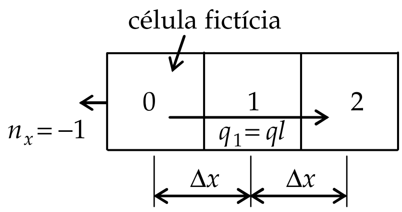
$$(i=n)\;\rightarrow\;\boxed{u_n=ur}$$

Condições de contorno do tipo Neuman

$(i=1)$:

$$q=-k\cdot\frac{du}{dx}\cdot n_x \;\rightarrow\; q_1 \cong -k\cdot\frac{u_2-u_0}{2\Delta x}\cdot(-1)=ql \;\rightarrow\; u_0=u_2-ql\cdot\frac{2\Delta x}{k}$$

$$-u_0^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)u_1^{m+1}-u_2^{m+1}=u_0^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)u_1^m+u_2^m+2\frac{s_1^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2$$



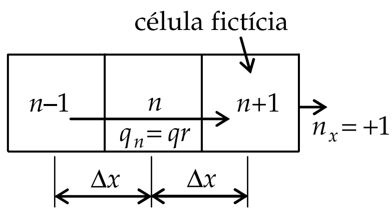
$$\Rightarrow\quad -\left(u_2^{m+1}-ql\cdot\frac{2\Delta x}{k}\right)+\left(2+\frac{2}{r}\right)u_1^{m+1}-u_2^{m+1}=\left(u_2^m-ql\cdot\frac{2\Delta x}{k}\right)+\left(\frac{2}{r}-2\right)u_1^m+u_2^m+2\frac{s_1^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2$$

$$(i=1)\;\rightarrow\;\boxed{\left(2+\frac{2}{r}\right)u_1^{m+1}-2u_2^{m+1}=\left(\frac{2}{r}-2\right)u_1^m+2u_2^m+2\frac{s_1^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2-ql\cdot\frac{4\Delta x}{k}}$$

$(i=n)$:

$$q=-k\cdot\frac{du}{dx}\cdot n_x \;\rightarrow\; q_n \cong -k\cdot\frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2\Delta x}\cdot(+1)=qr \;\rightarrow\; u_{n+1}=u_{n-1}-qr\cdot\frac{2\Delta x}{k}$$

$$-u_{n-1}^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)u_n^{m+1}-u_{n+1}^{m+1}=u_{n-1}^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)u_n^m+u_{n+1}^m+2\frac{s_i^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2$$



$$\Rightarrow\quad -u_{n-1}^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)u_n^{m+1}-\left(u_{n-1}^{m+1}-qr\cdot\frac{2\Delta x}{k}\right)=u_{n-1}^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)u_n^m+\left(u_{n-1}^m-qr\cdot\frac{2\Delta x}{k}\right)+2\frac{s_n^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2$$

$$(i=n)\;\rightarrow\;\boxed{-2u_{n-1}^{m+1}+\left(2+\frac{2}{r}\right)u_n^{m+1}=2u_{n-1}^m+\left(\frac{2}{r}-2\right)u_n^m+2\frac{s_n^m}{k\cdot A}\cdot\Delta x^2-qr\cdot\frac{4\Delta x}{k}}$$

Pode-se montar um sistema de equações para solução no passo m+1, cuja matriz de coeficientes tem um formato "tridiagonal":

$$
\begin{bmatrix}
X & X \\
X & X & X \\
& X & X & X \\
& & X & X & X \\
& & & X & X & X \\
& & & & X & X & X \\
& & & & & X & X & X \\
& & & & & & X & X & X \\
& & & & & & & X & X & X \\
& & & & & & & & X & X & X \\
& & & & & & & & & X & X & X \\
& & & & & & & & & & X & X & X \\
& & & & & & & & & & & X & X & X \\
& & & & & & & & & & & & X & X & X \\
& & & & & & & & & & & & & X & X
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{Bmatrix}
. \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ u_{i-1}^{m+1} \\ u_{i}^{m+1} \\ u_{i+1}^{m+1} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ .
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
X \\ X \\ X \\ X \\ X \\ X \\ X \\ X \\ X \\ X \\ X \\ X \\ X \\ X \\ X
\end{Bmatrix}
$$

Esse sistema pode ser resolvido por métodos diretos (eliminação de Gauss, método de Cholesky, etc.) ou por métodos iterativos. Pode-se explorar o formato tridiagonal da matriz e obter uma resposta de forma muito eficiente.