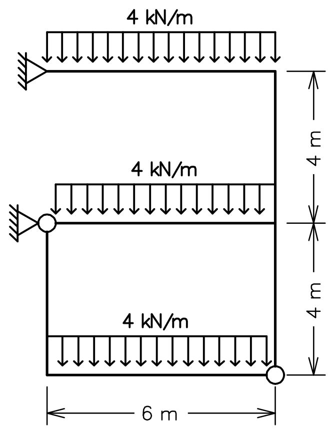
ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 2º Semestre – 2009

Primeira Prova – Data: 28/09/2009 – Duração: 2:45 hs – Sem Consulta

1ª Questão (5,5 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 10^5$ kNm².



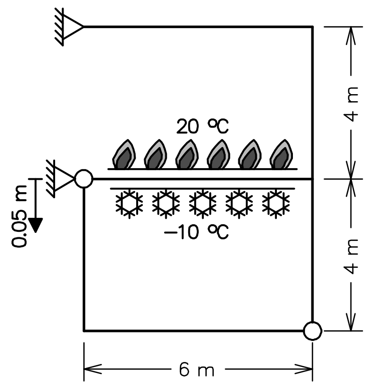
2ª Questão (3,5 pontos)
Considere que a estrutura da questão anterior sofreu as seguintes solicitações (não considere o carregamento):

- Variação de temperatura da barra central: as fibras superiores sofrem um aquecimento de $\Delta T_s = +20°C$ e as fibras inferiores sofrem um resfriamento de $\Delta T_i = -10°C$.
- Apoio central sofreu um recalque vertical ρ = 5 cm, de cima para baixo.

Determine o diagrama de momentos fletores no quadro devido a essas solicitações atuando simultaneamente, sabendo que:

- A altura da seção transversal das barras é h = 0.50 m e o centro de gravidade da seção transversal fica no meio da altura.
- O coeficiente de dilatação térmica das barras é $\alpha = 10^{-5}/°C$.

Considere deformações axiais das barras apenas para o efeito térmico.



Sabe-se:

(i) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$du^T = \alpha \Delta T_{CG} \, dx$
sendo ΔT_{CG} a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

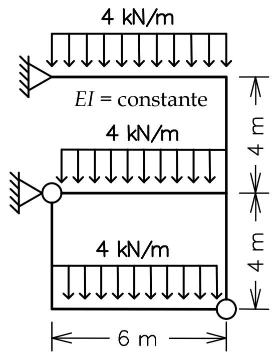
(ii) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$
sendo ΔT_i a variação de temperatura das fibras inferiores da viga e ΔT_s a variação de temperatura das fibras superiores.

3ª Questão (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

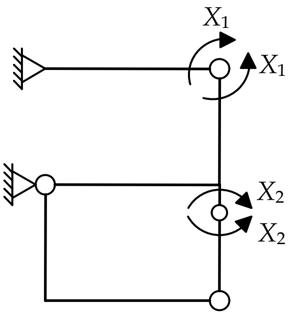
Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{bf - de}{ad - bc} \\ \\ X_2 = \dfrac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

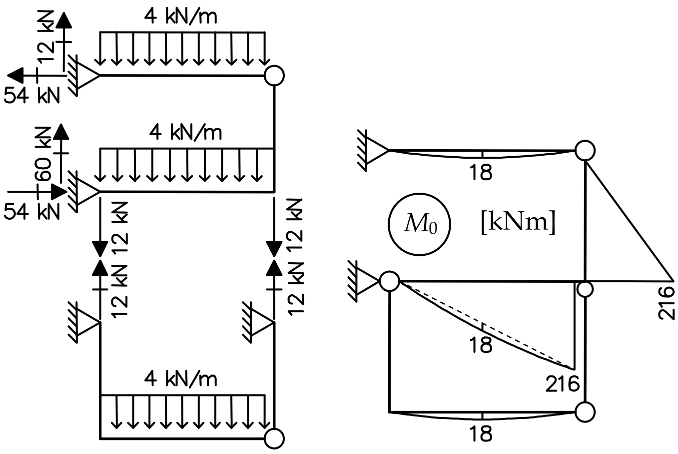
1ª Questão



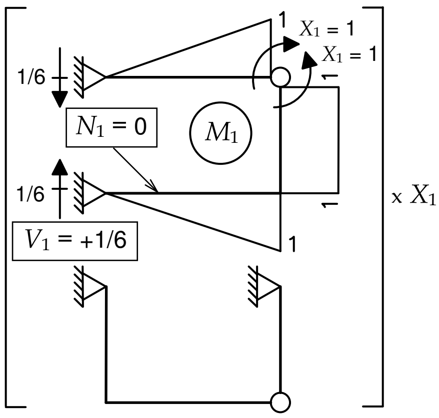
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos (g = 2)



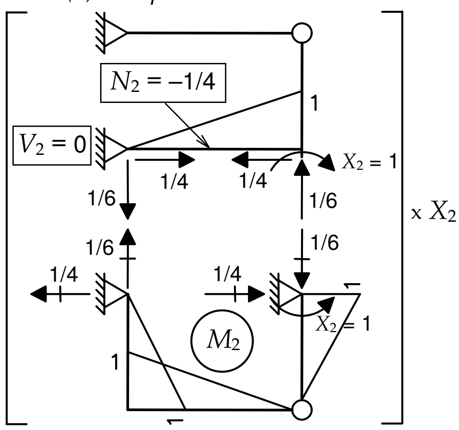
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases}\delta_{10}+\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=0\\ \delta_{20}+\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix}+864\\-504\end{Bmatrix}+\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}+8 & -2\\ -2 & +20/3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}X_1=-96.3\text{ kNm}\\ X_2=+46.7\text{ kNm}\end{cases}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 216\cdot 4+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 216\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 6\right]=+\frac{864}{EI}$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 216\cdot 6-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 6-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 6\right]=-\frac{504}{EI}$$

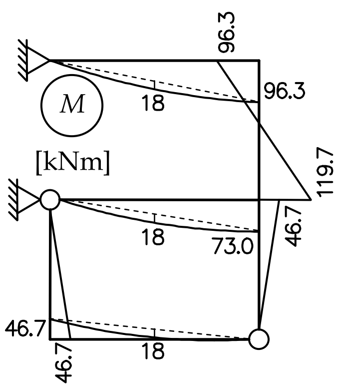
$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right]=-\frac{2}{EI}$$

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\left[+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right)+1\cdot 1\cdot 4\right]=+\frac{8}{EI}$$

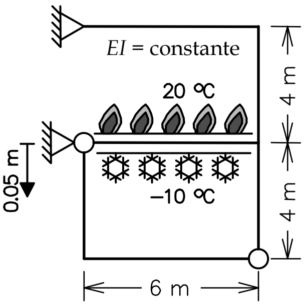
$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\cdot\left[+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right)+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 4\right)\right]=+\frac{20}{3EI}$$

Momentos Fletores Finais:

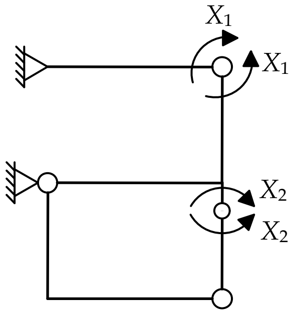
$$M=M_0+M_1\cdot X_1+M_2\cdot X_2$$



2ª Questão



Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos (g = 2)



Caso (0) – Solicitações externas isolada no SP

M_0 (nulo) Variação de temperatura e recalque de apoio não provocam esforços internos no SP isostático.

Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP
(veja questão anterior)

Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP
(veja questão anterior)

Caso (0) – Solicitações externas isolada no SP

Variação de temperatura na barra central:

$$du^T = \alpha \cdot \Delta T_{CG} \cdot dx = \alpha\left(\frac{-10^\circ\mathrm{C} + 20^\circ\mathrm{C}}{2}\right)dx = +5 \cdot \alpha \cdot dx$$

$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h}dx = \frac{\alpha(-10^\circ\mathrm{C} - 20^\circ\mathrm{C})}{0.50}dx = -60 \cdot \alpha \cdot dx$$

$$\delta_{10}^T = \int_0^6 N_1 du^T + \int_0^6 M_1 d\theta^T \quad \rightarrow \quad \delta_{10}^T = 0 - 60 \cdot \alpha \int_0^6 M_1(x)dx = -60 \cdot \alpha\left[+\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6\right] = -180 \cdot \alpha$$

(M_1 é positivo, pois traciona as fibras inferiores da barra central.)

$$\delta_{20}^T = \int_0^6 N_2 du^T + \int_0^6 M_2 d\theta^T \quad \rightarrow \quad \delta_{20}^T = +5 \cdot \alpha \int_0^6 N_2(x)dx - 60 \cdot \alpha \int_0^6 M_2(x)dx = +5 \cdot \alpha\left[-\frac{1}{4} \cdot 6\right] - 60 \cdot \alpha\left[-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6\right]$$

(M_2 é negativo, pois traciona as fibras superiores da barra central.)

$$\delta_{20}^T = +\frac{345}{2} \cdot \alpha$$

Recalque do apoio central: $\rho = -0.05$ m (negativo, pois é para baixo).

No caso (0), como o SP é isostático, as barras só têm movimento de corpo rígido (sem deformação).

Pelo Princípio das Forças Virtuais (PFV): $\overline{W_E} = \overline{U}$, sendo $\overline{U} = 0$, pois não existem deformações. $\Rightarrow$

$$1 \cdot \delta_{10}^\rho + V_1 \cdot \rho = 0 \quad \rightarrow \quad 1 \cdot \delta_{10}^\rho + \frac{1}{6} \cdot (-0.05) = 0 \quad \rightarrow \quad \delta_{10}^\rho = +\frac{0.05}{6}$$

$$1 \cdot \delta_{20}^\rho + V_2 \cdot \rho = 0 \quad \rightarrow \quad 1 \cdot \delta_{20}^\rho + 0 \cdot (-0.05) = 0 \quad \rightarrow \quad \delta_{20}^\rho = 0$$

Equações de compatibilidade (coeficientes de flexibilidades são os mesmos da questão anterior)*:*

$$\begin{cases} (\delta_{10}^T + \delta_{10}^\rho) + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ (\delta_{20}^T + \delta_{20}^\rho) + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -180 \cdot \alpha + 0.05/6 \\ +345 \cdot \alpha / 2 + 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} +8 & -2 \\ -2 & +20/3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -95.3 \text{ kNm} \\ X_2 = -54.5 \text{ kNm} \end{cases}$$

Momentos Fletores Finais:

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$$

(M_0 é nulo.)