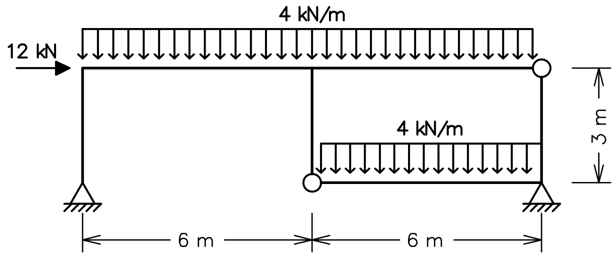
ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2010

Primeira Prova – Data: 19/04/2010 – Duração: 2:45 hs – Sem Consulta

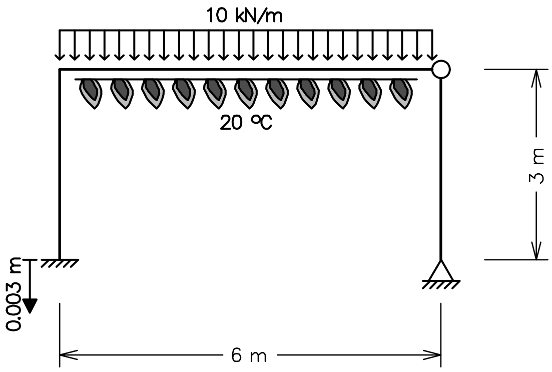
1ª Questão (5,5 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 10^5$ kNm².



2ª Questão (3,5 pontos)
Para o pórtico plano mostrado abaixo, pede-se o diagrama de momentos fletores utilizando o Método das Forças. O material tem módulo de elasticidade $E = 2 \times 10^8$ kN/m² e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}$ /°C. As barras do pórtico têm uma seção transversal momento de inércia $I = 0.0001$ m⁴, altura $h = 0.60$ m e centro de gravidade no meio de altura. As seguintes solicitações atuam no pórtico concomitantemente:

- Carregamento com força vertical uniformemente distribuída de 10 kN/m atuando na viga do pórtico.
- Aquecimento da face inferior da viga de $\Delta T_i = +20$ °C. A face superior da viga não sofre variação de temperatura, isto é, $\Delta T_s = 0$ °C. Os pilares não sofrem variação de temperatura.
- Recalque vertical (para baixo) de 3 mm (0.003 m) do apoio esquerdo.

Considere que as barras do pórtico podem se deformar axialmente somente para a solicitação de variação de temperatura, isto é, para os efeitos do carregamento aplicado, do recalque de apoio e do hiperestático despreze a energia de deformação axial.



Sabe-se:

(i) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$du^T = \alpha \Delta T_{CG}\, dx$
sendo ΔT_{CG} a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

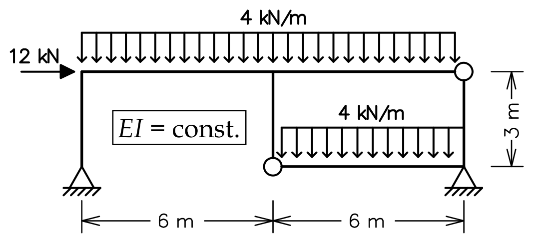
(ii) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$
sendo ΔT_i a variação de temperatura das fibras inferiores da viga e ΔT_s a variação de temperatura das fibras superiores.

3ª Questão (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

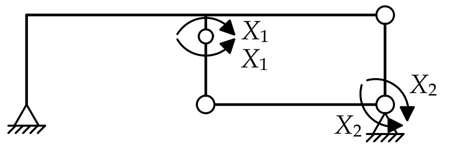
Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{bf - de}{ad - bc} \\ \\ X_2 = \dfrac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

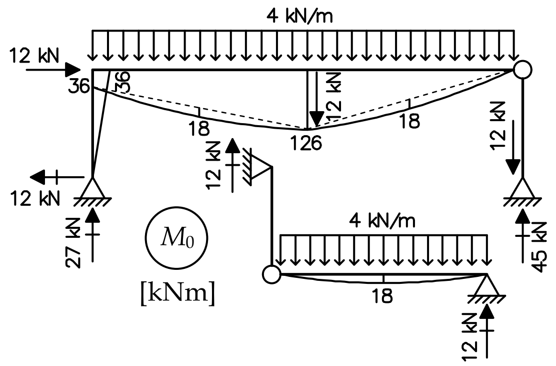
1ª Questão



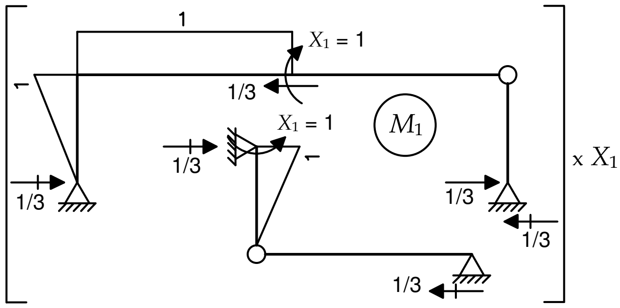
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos (g = 2)



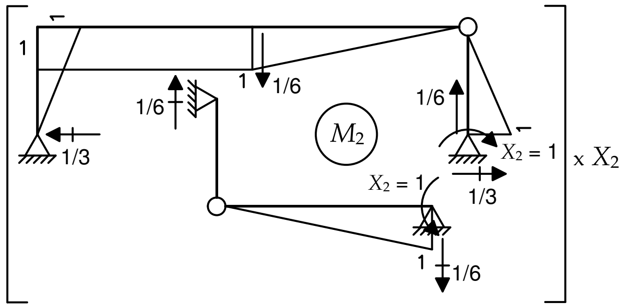
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -594 \\ +918 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} +8 & -7 \\ -7 & +12 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = +14.9 \text{ kNm} \\ X_2 = -67.8 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 36 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 126 \cdot 6 - \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 18 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 36 \cdot 3 \right] = -\frac{594}{EI}$$

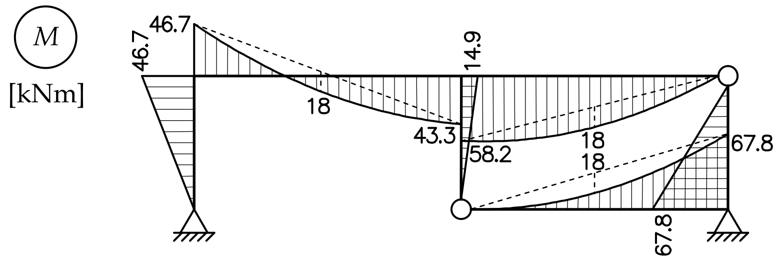
$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 36 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 126 \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 18 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 126 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 18 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 36 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 18 \cdot 6 \right] = +\frac{918}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \right) \right] = +\frac{8}{EI} \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-1 \cdot 1 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \right] = -\frac{7}{EI}$$

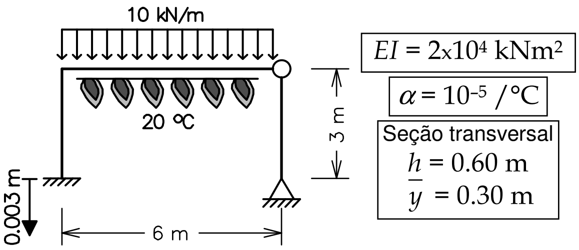
$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \right) \right] = +\frac{12}{EI}$$

Momentos Fletores Finais:

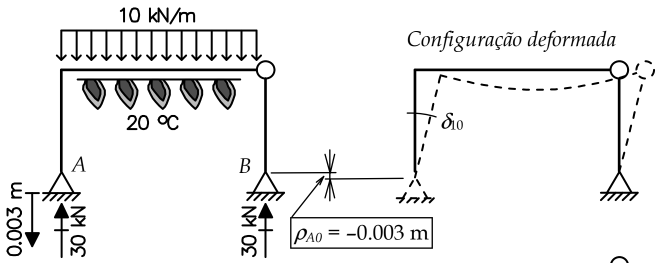
$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$$



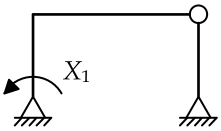
2ª Questão



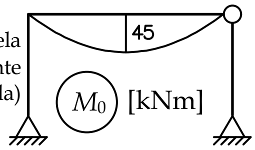
Caso (0) – Solicitações externas isoladas no SP



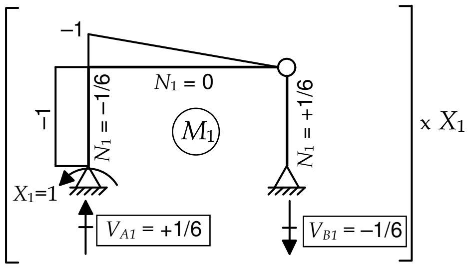
Sistema Principal e Hiperestático (g=1)



(provocado somente pela força uniformemente distribuída)



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



$$\delta_{11} = \int_{estrutura} \frac{(M_1)^2}{EI} dx$$

(desconsiderando deformação axial)

Equação de compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$\delta_{10} = \delta_{10}^{q} + \delta_{10}^{\rho} + \delta_{10}^{T}$$

$$\delta_{10}^{q} = \int_{estrutura} \frac{M_1 M_0}{EI} dx$$ (desconsiderando deformação axial)

$$1 \cdot \delta_{10}^{\rho} + V_{A1} \cdot \rho_{A0} = 0 \;\Rightarrow\; \delta_{10}^{\rho} = -V_{A1} \cdot \rho_{A0}$$

$$\delta_{10}^{T} = \int_{viga} M_1 d\theta^T + \int_{viga} N_1 du^T$$ (considerando deformação axial)

$$\delta_{10}^{q} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 45 \cdot 6 \right] = -45 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\delta_{10}^{\rho} = -V_{A1} \cdot \rho_{A0} = -[1/6 \cdot (-0.003)] = +5 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$d\theta^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot (20)}{0.60} dx = +\alpha \cdot \frac{100}{3} \cdot dx$$

$$du^T = \alpha \cdot \Delta T_{GC} \cdot dx = +\alpha \cdot 10 \cdot dx$$

$$\delta_{10}^{T} = +\alpha \cdot \frac{100}{3} \cdot \int_{viga} M_1 dx + \alpha \cdot 20 \cdot \int_{viga} N_1 dx$$

$$\delta_{10}^{T} = +\alpha \cdot \frac{100}{3} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 6 \right] + \alpha \cdot 10 \cdot [(0) \cdot 6] = -10 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\delta_{10} = \delta_{10}^{q} + \delta_{10}^{\rho} + \delta_{10}^{T} = -50 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 6 + (-1) \cdot (-1) \cdot 3 \right]$$

$$\delta_{11} = +2.5 \times 10^{-4} \text{ rad/kNm}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \;\rightarrow -50 \times 10^{-4} + 2.5 \times 10^{-4} \cdot X_1 = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = +20 \text{ kNm}$$

Momentos fletores finais

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$$