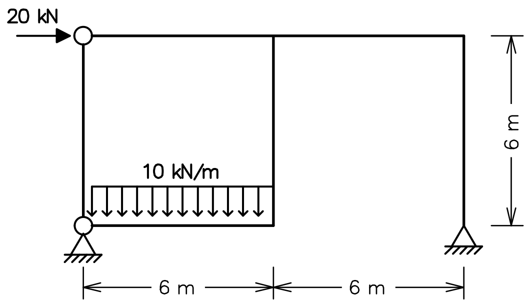
ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 2º Semestre – 2010

Primeira Prova – Data: 20/09/2010 – Duração: 2:45 hs – Sem Consulta

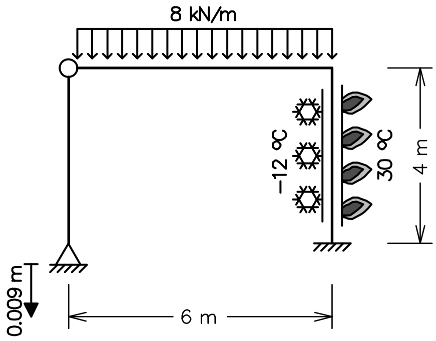
1ª Questão (5,5 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 10^5$ kNm².



2ª Questão (3,5 pontos)
Para o pórtico plano mostrado abaixo, pede-se o diagrama de momentos fletores utilizando o Método das Forças. O material tem módulo de elasticidade $E = 10^8$ kN/m² e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}$ /°C. As barras do pórtico têm uma seção transversal com momento de inércia $I = 0.001$ m⁴, altura $h = 0.50$ m e centro de gravidade no meio de altura. As seguintes solicitações atuam no pórtico concomitantemente:

- Carregamento com força vertical uniformemente distribuída de 8 kN/m atuando na viga do pórtico.
- Aquecimento de ΔT_i = +30 °C na face exterior (fibras inferiores da seção transversal) e resfriamento de ΔT_s = –12 °C na face interior (fibras superiores da seção transversal) do pilar na direita. A viga e o pilar na esquerda não sofrem variação de temperatura.
- Recalque vertical (para baixo) de 9 mm (0.009 m) do apoio esquerdo.

Considere deformação axial somente no cálculo do(s) termo(s) de carga para a solicitação de variação de temperatura, isto é, para os efeitos do carregamento aplicado, do recalque de apoio e do(s) hiperestático(s) despreze deformação axial.



Sabe-se:

(i) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$du^T = \alpha \Delta T_{CG}\, dx$
sendo ΔT_{CG} a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

(ii) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é

$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$

sendo ΔT_i a variação de temperatura das fibras inferiores (face externa) e ΔT_s a variação de temperatura das fibras superiores (face interna) do pilar na esquerda.

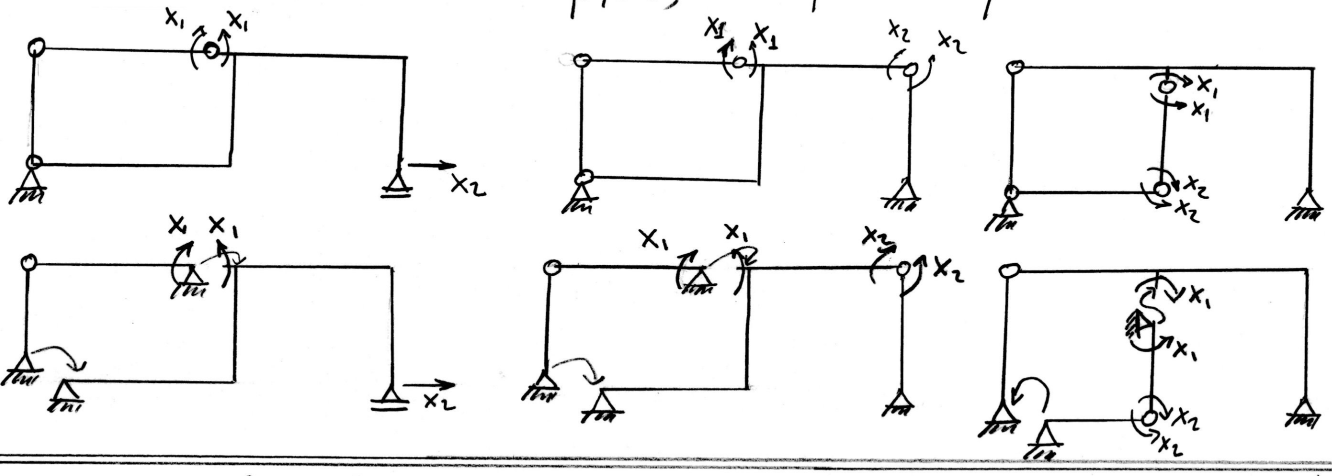
3ª Questão (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{bf - de}{ad - bc} \\[2ex] X_2 = \dfrac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

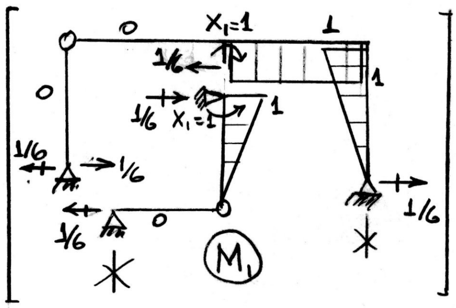
1ª Questão

Existem várias opções, como por exemplo:

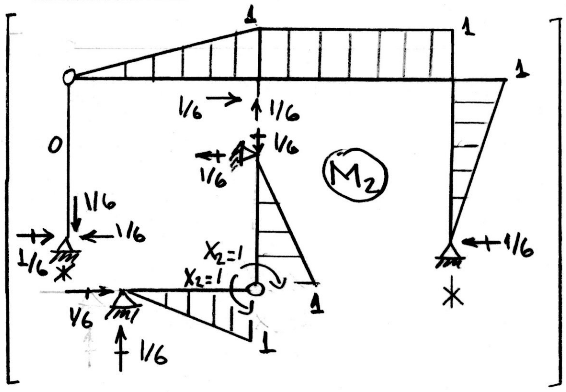


(adotando a terceira opção para Sistema Principal)

caso (1): X_1 isolado no SP



caso (2): X_2 isolado no SP

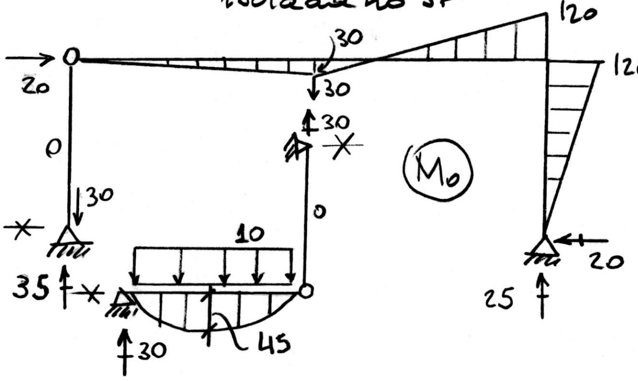


$$EI\delta_{11} = 6\times1\times1 + 2\times\frac{1}{3}\times6\times1\times1 = 10$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = -6\times1\times1 + \frac{1}{6}\times6\times1\times1 - \frac{1}{3}\times6\times1\times1 = -7$$

$$EI\delta_{22} = 4\times\frac{1}{3}\times6\times1\times1 + 6\times1\times1 = 14$$

Caso (0): Solicitação externa isolada no SP



$$EI\delta_{10} = -\frac{1}{2}\times6\times120\times1 + \frac{1}{2}\times6\times30\times1 - \frac{1}{3}\times6\times120\times1 = -510$$

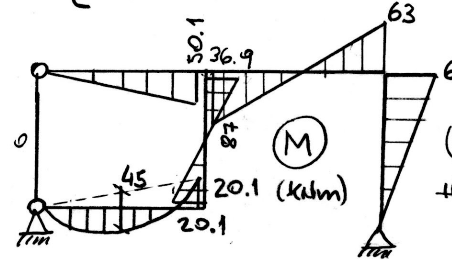
$$EI\delta_{20} = -\frac{1}{3}\times6\times30\times1 + \frac{1}{2}\times6\times120\times1 - \frac{1}{2}\times6\times30\times1 + \frac{1}{3}\times6\times45\times1 + \frac{1}{3}\times6\times120\times1 = 540$$

Sistema de Equs. de Compatibilidade

$$\begin{cases}\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0\\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0\end{cases}$$

$$\frac{1}{EI}\begin{Bmatrix}-510\\540\end{Bmatrix} + \frac{1}{EI}\begin{bmatrix}10 & -7\\-7 & 14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

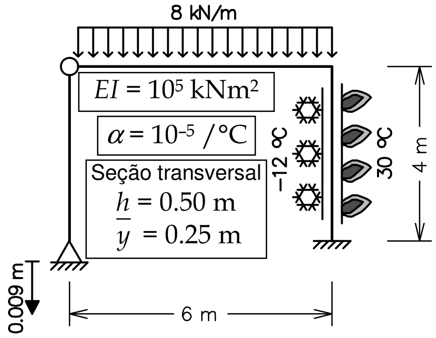
$$\Rightarrow \begin{cases}X_1 = 36,92 \text{ KNm}\\ X_2 = -20,11 \text{ KNm}\end{cases}$$



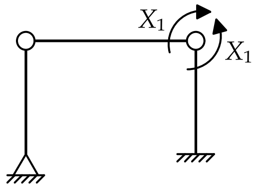
Momentos Fletores

$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2$

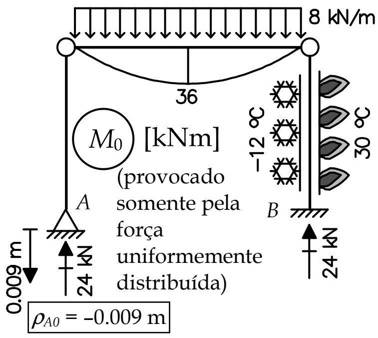
2ª Questão



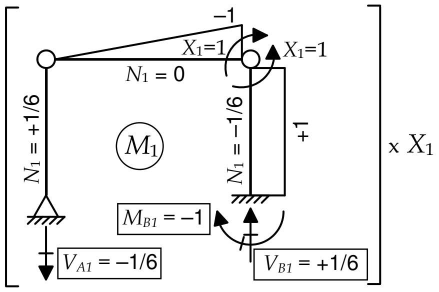
Sistema Principal e Hiperestático (g=1)



Caso (0) – Solicitações externas isoladas no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



$$\delta_{11} = \int_{estrutura} \frac{(M_1)^2}{EI} dx$$

(desconsiderando deformação axial)

Equação de compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$\delta_{10} = \delta_{10}^{q} + \delta_{10}^{\rho} + \delta_{10}^{T}$$

$$\delta_{10}^{q} = \int_{estrutura} \frac{M_1 M_0}{EI} dx$$ (desconsiderando deformação axial)

$$1 \cdot \delta_{10}^{\rho} + V_{A1} \cdot \rho_{A0} = 0 \;\Rightarrow\; \delta_{10}^{\rho} = -V_{A1} \cdot \rho_{A0}$$

$$\delta_{10}^{T} = \int_{pilar} M_1 d\theta^T + \int_{pilar} N_1 du^T$$ (considerando deformação axial)

$$\delta_{10}^{q} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 36 \cdot 6 \right] = -72 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{10}^{\rho} = -V_{A1} \cdot \rho_{A0} = -[(-1/6) \cdot (-0.009)] = -150 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$d\theta^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot (+30 - (-12))}{0.50} dx = +\alpha \cdot 84 \cdot dx$$

$$du^T = \alpha \cdot \Delta T_{GC} \cdot dx = \alpha \cdot \frac{+30 - 12}{2} \cdot dx = +\alpha \cdot 9 \cdot dx$$

$$\delta_{10}^{T} = +\alpha \cdot 84 \cdot \int_{pilar} M_1 dx + \alpha \cdot 9 \cdot \int_{pilar} N_1 dx$$

$$\delta_{10}^{T} = +\alpha \cdot 84 \cdot [(+1) \cdot 4] + \alpha \cdot 9 \cdot [(-1/6) \cdot 4] = +330 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{10} = \delta_{10}^{q} + \delta_{10}^{\rho} + \delta_{10}^{T} = +108 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 6 + (+1) \cdot (+1) \cdot 4 \right]$$

$$\delta_{11} = +6 \times 10^{-5} \text{ rad/kNm}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \;\rightarrow +108 \times 10^{-5} + 6 \times 10^{-5} \cdot X_1 = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = -18 \text{ kNm}$$

Momentos fletores finais

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$$