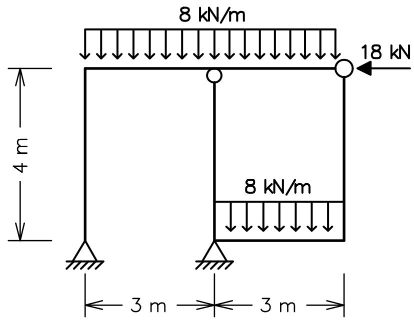
ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2011

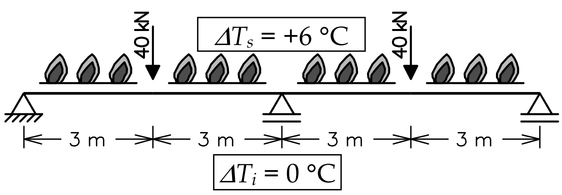
Primeira Prova – Data: 06/04/2011 – Duração: 2:45 hs – Sem Consulta

1ª Questão (5,5 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 10^5$ kNm².



2ª Questão (3,5 pontos)
Para a viga contínua mostrada abaixo, pede-se o diagrama de momentos fletores utilizando o Método das Forças. O material tem módulo de elasticidade $E = 10^8$ kN/m² e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}$ /°C. As barras da viga têm uma seção transversal com área A = 0.01 m², momento de inércia I = 0.001 m⁴, altura h = 0.60 m e centro de gravidade no meio de altura. As seguintes solicitações atuam na viga concomitantemente:

- Carregamento com duas forças concentradas verticais de 40 kN atuando nas seções médias de cada vão.
- Aquecimento de ΔT_s = +6 °C na face superior da viga e nenhuma variação de temperatura na face interior.



$E = 10^8\ \mathrm{kN/m^2}$ | $\alpha = 10^{-5}/°\mathrm{C}$

$A = 0.01\ \mathrm{m^2}$ | $I = 0.001\ \mathrm{m^4}$

$h = 0.60\ \mathrm{m}$ | $\bar{y} = 0.30\ \mathrm{m}$

Sabe-se:

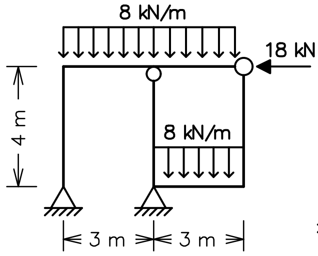
(i) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$du^T = \alpha \Delta T_{CG}\, dx$
sendo ΔT_{CG} a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

(ii) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$
sendo ΔT_i a variação de temperatura das fibras inferiores (face externa) e ΔT_s a variação de temperatura das fibras superiores (face interna) do pilar na esquerda.

3ª Questão (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

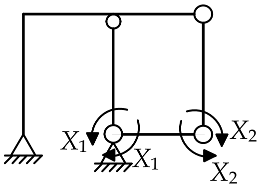
Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:
$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{bf - de}{ad - bc} \\[2ex] X_2 = \dfrac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

1ª Questão

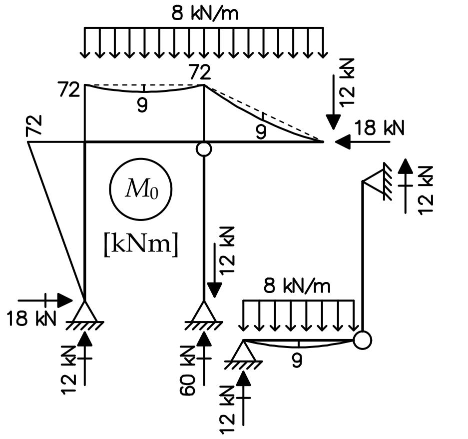


$EI = 10^5$ kNm²

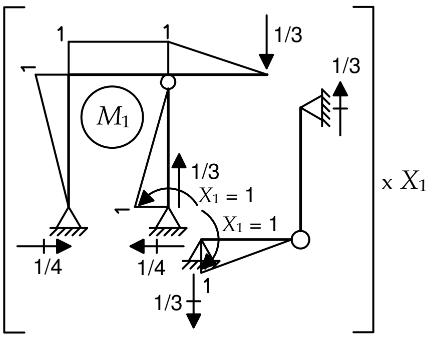
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos



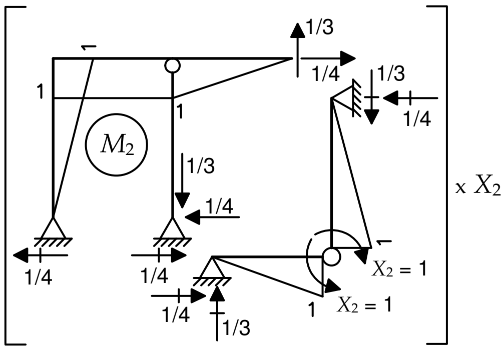
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} +366 \\ -348 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} +23/3 & -29/6 \\ -29/6 & +23/3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -31.7 \text{ kNm} \\ X_2 = +25.4 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+1\cdot 72\cdot 3 - \frac{2}{3}\cdot 1\cdot 9\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 72\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 9\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 72\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 9\cdot 3\right] = +\frac{366}{EI}$$

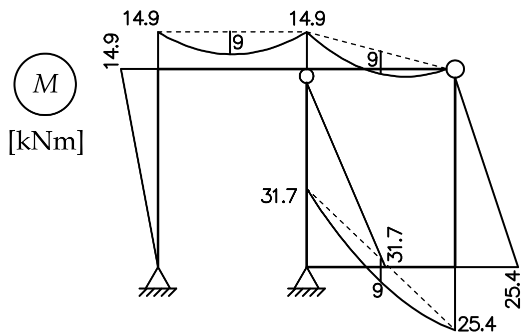
$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\cdot\left[-1\cdot 72\cdot 3 + \frac{2}{3}\cdot 1\cdot 9\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 72\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 9\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 72\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 9\cdot 3\right] = -\frac{348}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix} +1\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right) \\ +2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 4\right) \end{bmatrix} = +\frac{23}{3EI} \qquad \delta_{22} = \frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix} +1\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right) \\ +2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 4\right) \end{bmatrix} = +\frac{23}{3EI}$$

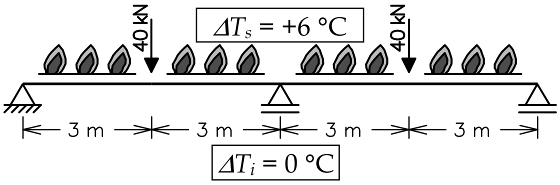
$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI}\cdot\left[-1\cdot 1\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right] = -\frac{29}{6EI}$$

Momentos Fletores Finais:

$$M = M_0 + M_1\cdot X_1 + M_2\cdot X_2$$



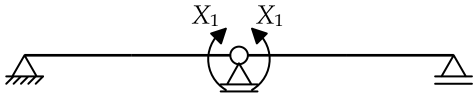
2ª Questão



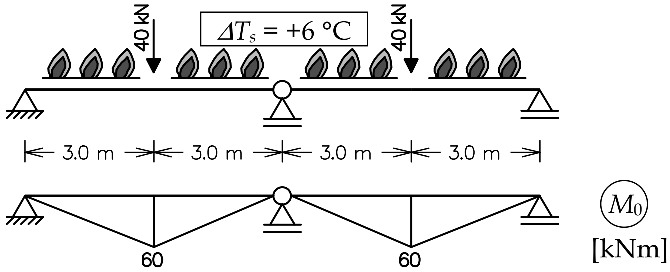
$E = 10^8$ kN/m^2 | $\alpha = 10^{-5}$/°C

$A = 0.01$ m^2 | $I = 0.001$ m^4 | $h = 0.60$ m | $\bar{y} = 0.30$ m

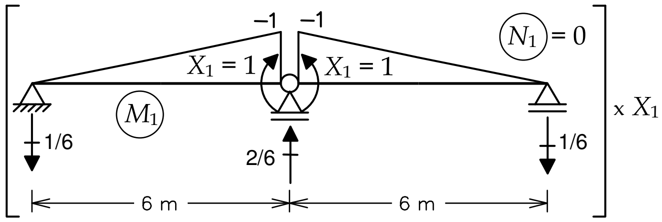
Sistema Principal e Hiperestático (g = 1)



Caso (0) – Solicitações externas isoladas no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Equação de compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$\delta_{10} = \delta_{10}^P + \delta_{10}^T$$

$$\delta_{10}^P = \int_{viga} \frac{M_1 M_0}{EI} dx$$

$$\delta_{11} = \int_{viga} \frac{(M_1)^2}{EI} dx$$

$$\delta_{10}^T = \int_{viga} M_1 d\theta_0^T + \int_{viga} N_1 du_0^T$$, sendo $N_1 = 0$.

$$\delta_{10}^P = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (-0.5) \cdot 60 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot (-0.5) \cdot 60 \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot (-1) \cdot 60 \cdot 3 \right) \right] = -\frac{180}{EI}$$

$$\delta_{10}^P = -180 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$d\theta_0^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot (0-6)}{0.60} dx = -\alpha \cdot 10 \cdot dx$$

$$\delta_{10}^T = \int M_1 d\theta_0^T = -\alpha \cdot 10 \cdot \int_0^{12} M_1 dx = -\alpha \cdot 10 \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 6 \right) \right]$$

$$\delta_{10}^T = +60 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{10} = \delta_{10}^P + \delta_{10}^T = -180 \times 10^{-5} + 60 \times 10^{-5} = -120 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 6 \right] = +\frac{4}{EI}$$

$$\delta_{11} = +4 \times 10^{-5} \text{ rad/kNm}$$

$$X_1 = -\delta_{10} / \delta_{11} = -(-120 \times 10^{-5}) / 4 \times 10^{-5} = +30 \text{ kNm}$$

Momentos fletores finais : $M = M_0 + M_1 \cdot X_1$