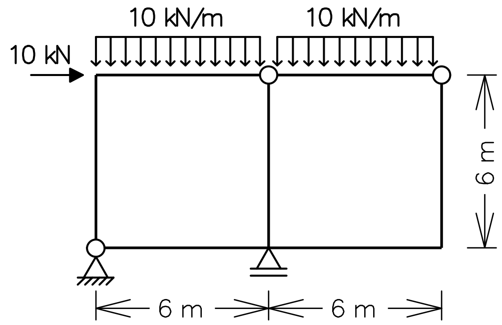
ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 2º Semestre – 2012

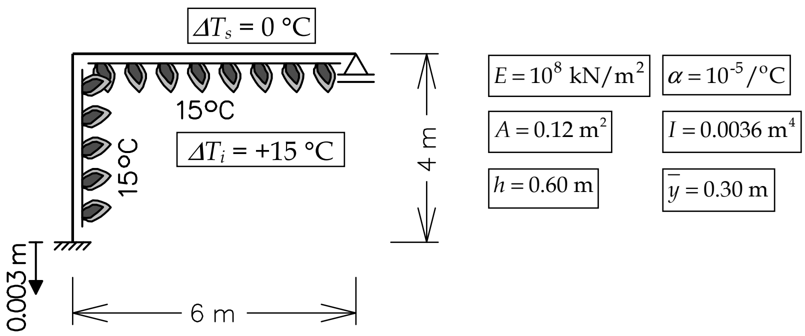
Primeira Prova – Data: 12/09/2012 – Duração: 2:30 hs – Sem Consulta

1ª Questão (5,5 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 1.0x10^4$ kNm².



2ª Questão (3,5 pontos)
Para o pórtico mostrado abaixo, pede-se o diagrama de momentos fletores utilizando o Método das Forças. O material tem módulo de elasticidade $E = 10^8$ kN/m² e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}$ /°C. As barras do pórtico têm uma seção transversal com área $A = 0.12$ m², momento de inércia $I = 0.0036$ m⁴, altura $h = 0.60$ m e centro de gravidade no meio de altura. As seguintes solicitações atuam no pórtico concomitantemente:

- Aquecimento de $\Delta T_i = +15$ °C no interior e nenhuma variação de temperatura no exterior.
- Recalque vertical, para baixo, de 3 mm (0.003 m) do apoio da esquerda.



Atenção: no cálculo do coeficiente de flexibilidade, considere somente deformação por flexão.

Sabe-se:

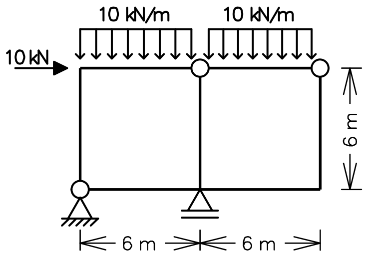
(i) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$du^T = \alpha \Delta T_{CG}\, dx$
sendo ΔT_{CG} a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

(ii) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$
sendo ΔT_i a variação de temperatura das fibras inferiores (face interna) e ΔT_s a variação de temperatura das fibras superiores (face externa) do pilar na esquerda.

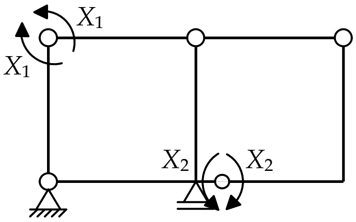
3ª Questão (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:
$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{bf - de}{ad - bc} \\ X_2 = \dfrac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

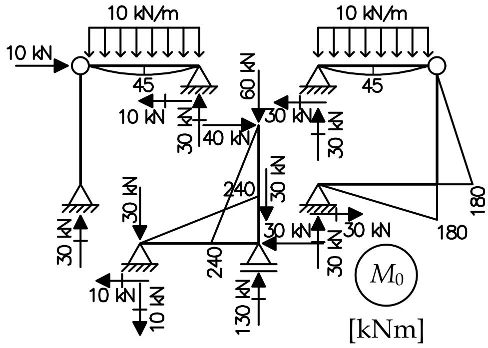
1ª Questão



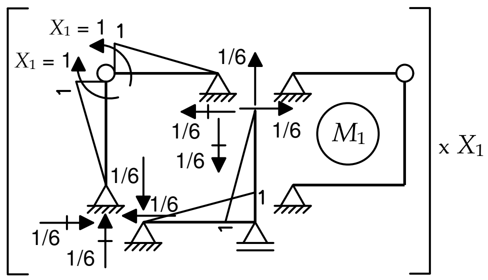
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos



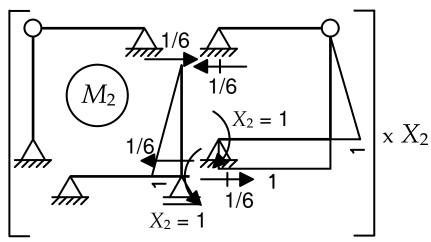
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} +870 \\ +1380 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} +8 & +2 \\ +2 & +10 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -78.2 \text{ kNm} \\ X_2 = -122.4 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 45\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 240\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 240\cdot 6\right] = +\frac{870}{EI}$$

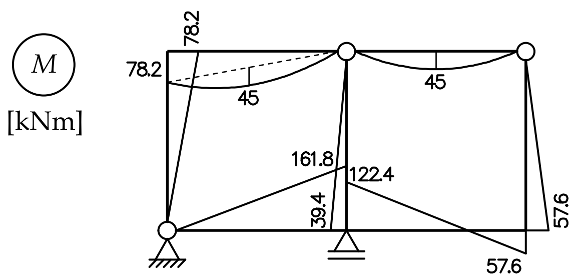
$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 240\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 180\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 180\cdot 6\right] = +\frac{1380}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\cdot\left[4\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right)\right] = +\frac{8}{EI} \qquad \delta_{22} = \frac{1}{EI}\cdot\left[2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right) + 1\cdot 1\cdot 6\right] = +\frac{10}{EI}$$

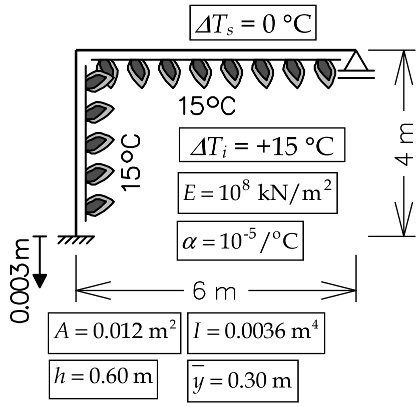
$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right] = +\frac{2}{EI}$$

Momentos Fletores Finais:

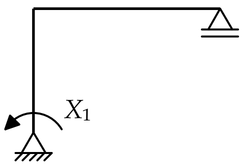
$$M = M_0 + M_1\cdot X_1 + M_2\cdot X_2$$



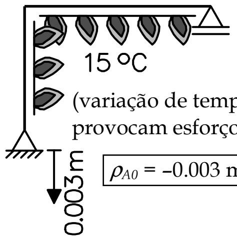
2ª Questão



Sistema Principal e Hiperestático (g = 1)



Caso (0) – Solicitações externas isoladas no SP



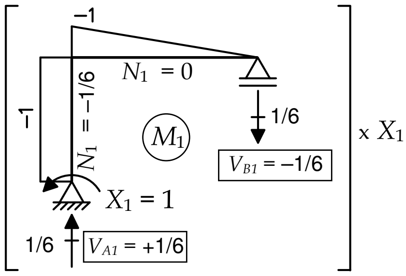
M_0 = 0

[kNm]

(variação de temperatura e recalque de apoio não provocam esforços internos no SP isostático)

$\rho_{A0} = -0.003$ m

Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



$$\delta_{11} = \int_{estrutura} \frac{(M_1)^2}{EI} dx$$

(considerando somente deformação por flexão)

Equação de compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$\delta_{10} = \delta_{10}^T + \delta_{10}^\rho$$

$$\delta_{10}^T = \int_{estrutura} M_1 d\theta_0^T + \int_{estrutura} N_1 du_0^T$$

$$1 \cdot \delta_{10}^\rho + V_{A1} \cdot \rho_{A0} = 0 \;\Rightarrow\; \delta_{10}^\rho = -V_{A1} \cdot \rho_{A0}$$

$$d\theta_0^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot (+15 - 0)}{0.60} dx = +\alpha \cdot 25 \cdot dx$$

$$du_0^T = \alpha \cdot \Delta T_{CG} \cdot dx = +\alpha \cdot 7.5 \cdot dx$$

$$\delta_{10}^T = \int M_1 d\theta_0^T + \int N_1 du_0^T = +\alpha \cdot 25 \cdot \int M_1 dx + \alpha \cdot 7.5 \cdot \int N_1 dx = +\alpha \cdot 25 \cdot \left[(-1) \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 6\right] + \alpha \cdot 7.5 \cdot \left[\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 4\right]$$

$$\boxed{\delta_{10}^T = -180 \times 10^{-5} \text{ rad}}$$

$$\delta_{10}^\rho = -V_{A1} \cdot \rho_{A0} = -\left[(+1/6) \cdot (-0.003)\right]$$

$$\boxed{\delta_{10}^\rho = +50 \times 10^{-5} \text{ rad}}$$

$$\boxed{\delta_{10} = \delta_{10}^T + \delta_{10}^\rho = -130 \times 10^{-5} \text{ rad}}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left[(-1) \cdot (-1) \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 6\right] = +\frac{6}{EI}$$

$$\boxed{\delta_{11} = +\frac{5}{3} \times 10^{-5} \text{ rad/kNm}}$$

$$X_1 = -\delta_{10} / \delta_{11} = -\frac{(-130) \times 10^{-5}}{(5/3) \times 10^{-5}}$$

$$\boxed{X_1 = +78 \text{ kNm}}$$

Momentos fletores finais : $M = M_0 + M_1 \cdot X_1$