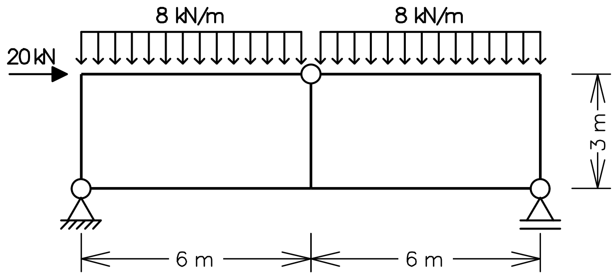
ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2013

Primeira Prova – Data: 13/04/2013 – Duração: 2:45 hs – Sem Consulta

1ª Questão (5,5 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 10^5$ kNm².



2ª Questão (3,5 pontos)
Considere o pórtico hiperestático abaixo, cujo diagrama final de momentos fletores também está indicado. O material tem módulo de elasticidade $E = 10^8$ kN/m² e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}$ /°C. As barras do pórtico têm uma seção transversal com área A = 0.12 m², momento de inércia I = 0.0036 m⁴, altura h = 0.60 m e centro de gravidade no meio de altura. As seguintes solicitações atuam no pórtico concomitantemente:

- Aquecimento de ΔT_s = +12 °C na face superior da viga superior e nenhuma outra variação de temperatura.
- Recalque horizontal, para a direita, de 2 mm (0.002 m) do apoio da esquerda.

Considerando o Sistema Principal (grau de hiperestaticidade g = 1) indicado na figura, pede-se:
(a) Valor do hiperestático X_1 com unidade (adote uma convenção de sinal e explique) (0,5 ponto).
(b) Interpretação física do termo de carga δ_{10}, indicando causa, localização, se é deslocamento ou rotação, e se é absoluto ou relativo (0,5 ponto).
(c) Valor do termo de carga δ_{10} com unidade (2,5 pontos).

$E = 10^8\ \text{kN/m}^2$

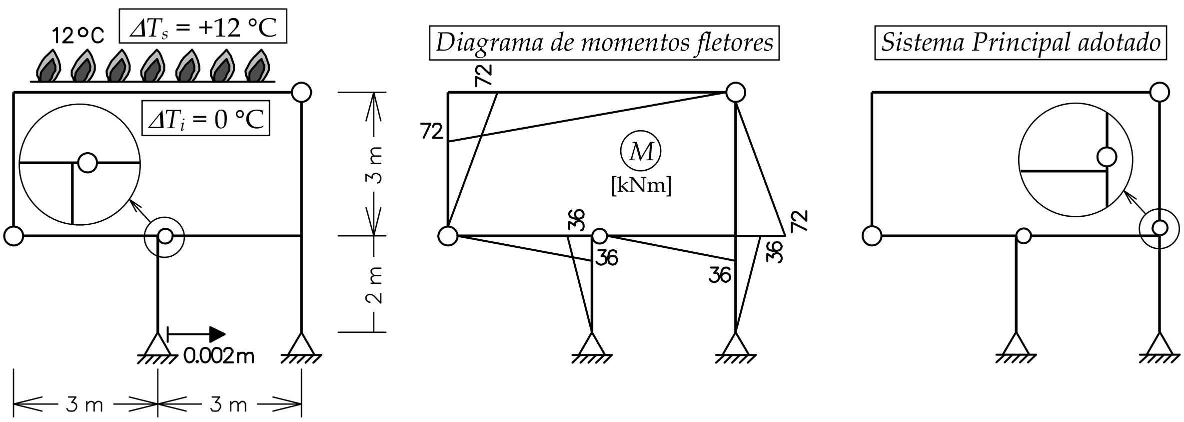
$\alpha = 10^{-5}/^\circ\text{C}$

$A = 0.12\ \text{m}^2$

$I = 0.0036\ \text{m}^4$

$h = 0.60\ \text{m}$

$\bar{y} = 0.30\ \text{m}$



Sabe-se:

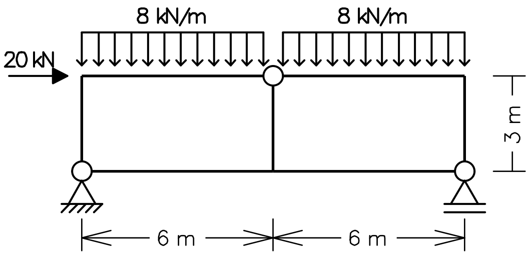
(i) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$du^T = \alpha \Delta T_{CG}\, dx$
sendo ΔT_{CG} a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

(ii) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx\,.$$

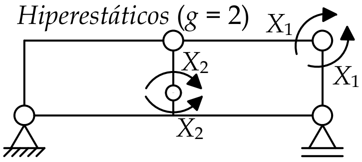
3ª Questão (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:
$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{bf - de}{ad - bc} \\[2ex] X_2 = \dfrac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

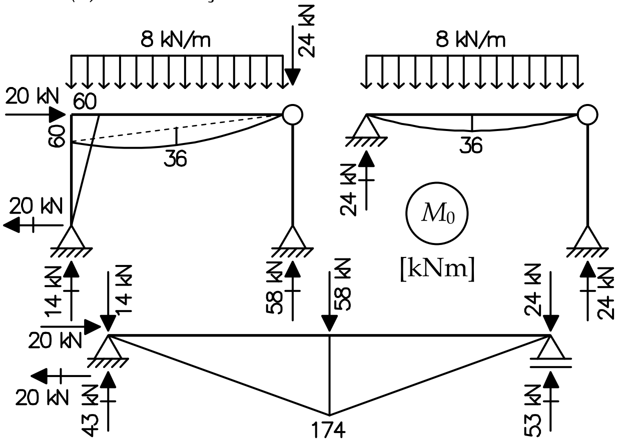
1ª Questão



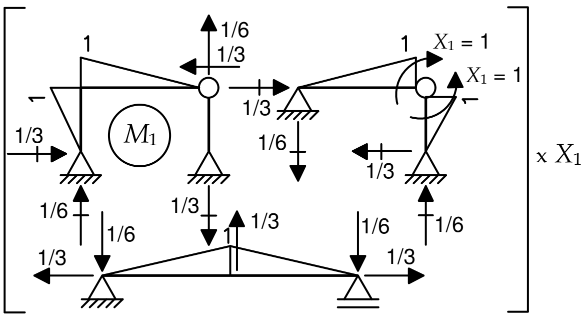
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos (g = 2)



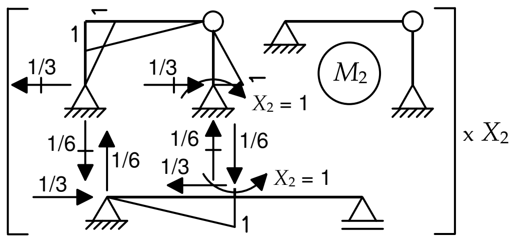
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases}\delta_{10}+\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=0\\ \delta_{20}+\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix}-1020\\+600\end{Bmatrix}+\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}+10 & -5\\-5 & +6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}X_1=+89.1\text{ kNm}\\X_2=-25.7\text{ kNm}\end{cases}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot1\cdot60\cdot6-\frac{1}{3}\cdot1\cdot36\cdot6-\frac{1}{3}\cdot1\cdot36\cdot6-\frac{1}{3}\cdot1\cdot60\cdot3-2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot174\cdot6\right)\right]=-\frac{1020}{EI}$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{3}\cdot1\cdot60\cdot6+\frac{1}{3}\cdot1\cdot36\cdot6+\frac{1}{3}\cdot1\cdot60\cdot3+\frac{1}{3}\cdot1\cdot174\cdot6\right]=+\frac{600}{EI}$$

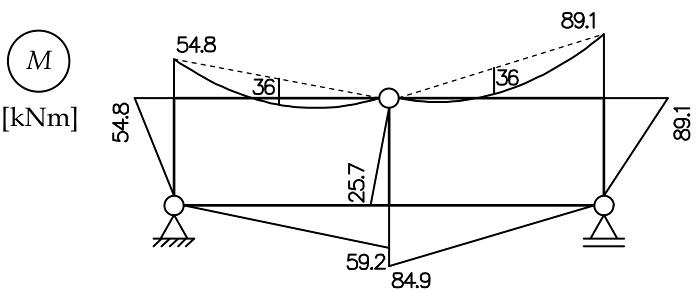
$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\left[4\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot6\right)+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot3\right)\right]=+\frac{10}{EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\cdot\left[2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot6\right)+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot3\right)\right]=+\frac{6}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\cdot\left[-2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot6\right)-\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot3\right]=-\frac{5}{EI}$$

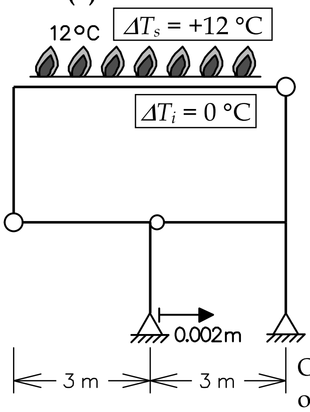
Momentos Fletores Finais:

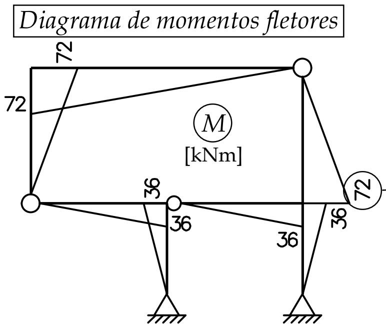
$$M=M_0+M_1\cdot X_1+M_2\cdot X_2$$

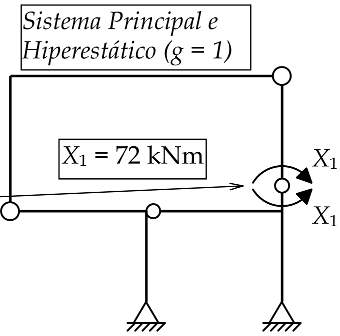


2ª Questão

Item (a)







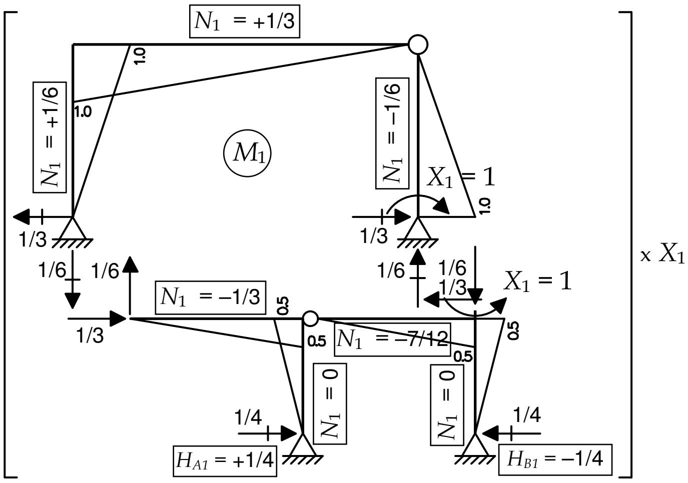
O hiperestático X_1 é o momento fletor na seção da estrutura hiperestática original onde foi introduzida a rótula na criação do Sistema Principal. X_1 foi considerado positivo tracionando as fibras da direita da barra vertical.

Item (b)

O termo de carga δ_{10} é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula introduzida na criação do Sistema Principal provocada pela variação de temperatura na barra superior e pelo recalque horizontal $\rho_{A0} = +0.002$ m no apoio da esquerda, no caso (0).

Item (c)

Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Equação de compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$\delta_{10} = \delta_{10}^{T} + \delta_{10}^{\rho}$$

$$\delta_{10}^{T} = \int_{viga} M_1 d\theta_0^T + \int_{viga} N_1 du_0^T$$

$$d\theta_0^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot (0-12)}{0.60} dx = -\alpha \cdot 20 \cdot dx$$

$$du_0^T = \alpha \cdot \Delta T_{CG} \cdot dx = +\alpha \cdot 6 \cdot dx$$

$$\delta_{10}^{T} = \int M_1 d\theta_0^T + \int N_1 du_0^T = -\alpha \cdot 20 \cdot \int M_1 dx + \alpha \cdot 6 \cdot \int N_1 dx = -\alpha \cdot 20 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (+1) \cdot 6\right] + \alpha \cdot 6 \cdot \left[\left(+\frac{1}{3}\right) \cdot 6\right]$$

$$\boxed{\delta_{10}^{T} = -48 \times 10^{-5} \text{ rad}}$$

$$1 \cdot \delta_{10}^{\rho} + H_{A1} \cdot \rho_{A0} = 0 \;\Rightarrow\; \delta_{10}^{\rho} = -H_{A1} \cdot \rho_{A0}$$

$$\delta_{10}^{\rho} = -H_{A1} \cdot \rho_{A0} = -\left[(+1/4) \cdot (+0.002)\right]$$

$$\boxed{\delta_{10}^{\rho} = -50 \times 10^{-5} \text{ rad}}$$

$$\boxed{\delta_{10} = \delta_{10}^{T} + \delta_{10}^{\rho} = -98 \times 10^{-5} \text{ rad}}$$

Verificação do valor de X_1 (isso não faz parte da questão):

$$\delta_{11} = \int_{pórtico} \frac{(M_1)^2}{EI} dx + \int_{pórtico} \frac{(N_1)^2}{EA} dx \quad \text{(considerando deformação axial)}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 3\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 2\right)\right] +$$

$$\frac{1}{EA} \cdot \left[\left(+\frac{1}{3}\right) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) \cdot 6 + \left(+\frac{1}{6}\right) \cdot \left(+\frac{1}{6}\right) \cdot 3 + \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 3 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3 + \left(-\frac{7}{12}\right) \cdot \left(-\frac{7}{12}\right) \cdot 3\right]$$

$\boxed{\delta_{11} = +1.361 \times 10^{-5} \text{ rad/kNm}}$ $\quad X_1 = -\delta_{10} / \delta_{11} \quad$ $X_1 = 72$ kNm (OK)