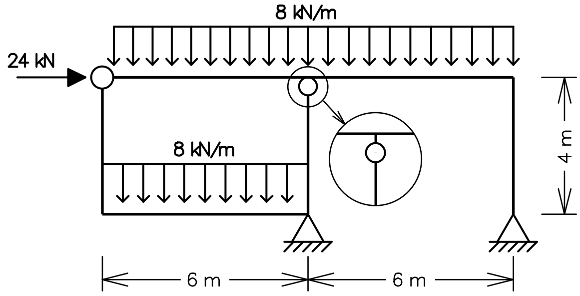
ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 2º Semestre – 2013

Primeira Prova – Data: 21/09/2013 – Duração: 2:45 hs – Sem Consulta

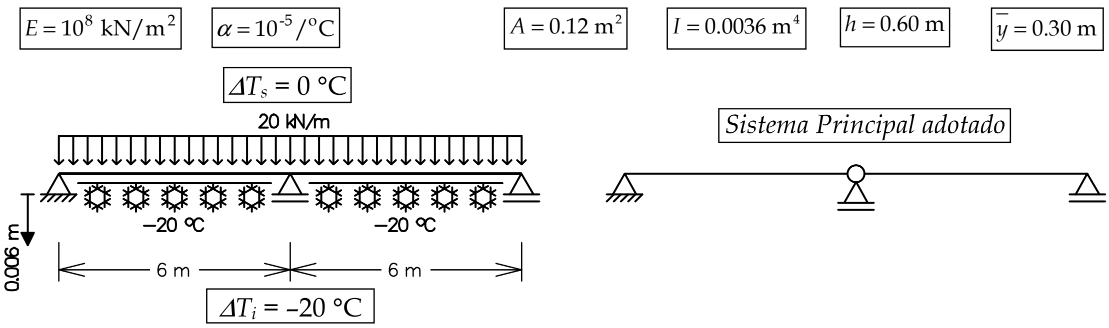
1ª Questão (5,5 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 10^5$ kNm².



2ª Questão (3,5 pontos)
Considere a viga contínua abaixo com dois vãos. O material tem módulo de elasticidade $E = 10^8$ kN/m² e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}$ /°C. A seção transversal da viga tem área $A = 0.12$ m², momento de inércia $I = 0.0036$ m⁴, altura $h = 0.60$ m e centro de gravidade no meio de altura. As seguintes solicitações atuam na viga concomitantemente:

- Força uniformemente distribuída de 20 kN/m aplicada ao longo de toda a extensão da viga.
- Resfriamento de $\Delta T_i = -20$ °C na face inferior da viga e nenhuma outra variação de temperatura.
- Recalque vertical, para baixo, de 6 mm (0.006 m) do apoio da esquerda.

Considerando o Sistema Principal indicado na figura, pede-se:
(a) Diagrama de momentos fletores da viga considerando as três solicitações externas (2,0 pontos).
(b) Interpretação física do termo de carga δ_{10}, indicando causa, localização, se é deslocamento ou rotação, e se é absoluto ou relativo (0,5 ponto).
(c) Explique a diferença de comportamento entre estruturas isostáticas e estruturas hiperestáticas com relação aos efeitos provocados por variação de temperatura e recalque de apoio (1,0 ponto).



Sabe-se:

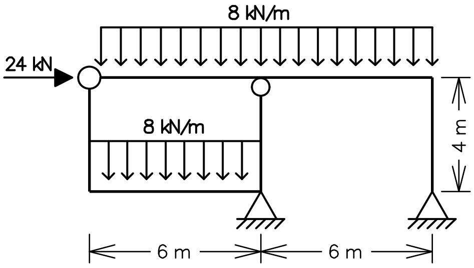
(i) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$du^T = \alpha \Delta T_{CG}\, dx$
sendo ΔT_{CG} a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

(ii) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx .$$

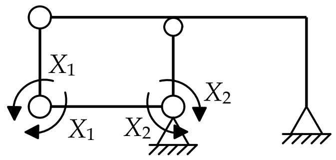
3ª Questão (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:
$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{bf - de}{ad - bc} \\ X_2 = \dfrac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

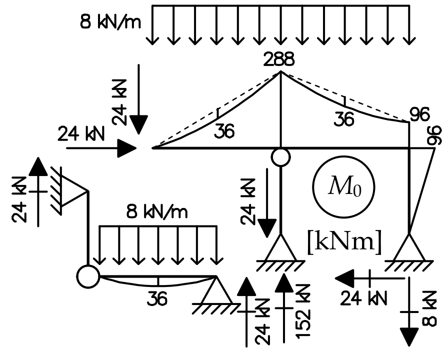
1ª Questão



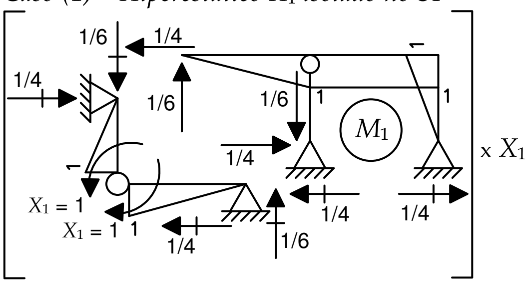
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos



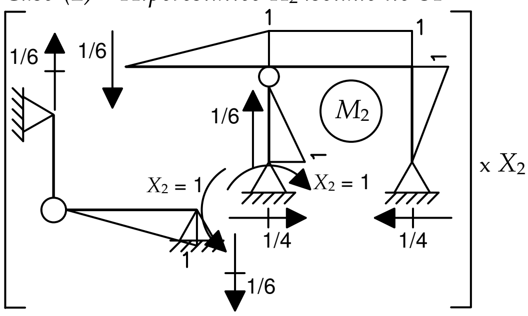
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases}\delta_{10}+\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=0\\ \delta_{20}+\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix}+870\\+1380\end{Bmatrix}+\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}+8 & +2\\+2 & +10\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}X_1=+61.5\text{ kNm}\\X_2=-94.7\text{ kNm}\end{cases}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot1\cdot288\cdot6+\frac{1}{3}\cdot1\cdot36\cdot6-\frac{1}{2}\cdot1\cdot288\cdot6-\frac{1}{2}\cdot1\cdot96\cdot6+\frac{2}{3}\cdot1\cdot36\cdot6-\frac{1}{3}\cdot1\cdot96\cdot4+\frac{1}{3}\cdot1\cdot36\cdot6\right]=-\frac{1568}{EI}$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{3}\cdot1\cdot288\cdot6-\frac{1}{3}\cdot1\cdot36\cdot6+\frac{1}{2}\cdot1\cdot288\cdot6+\frac{1}{2}\cdot1\cdot96\cdot6-\frac{2}{3}\cdot1\cdot36\cdot6+\frac{1}{3}\cdot1\cdot96\cdot4+\frac{1}{3}\cdot1\cdot36\cdot6\right]=+\frac{1712}{EI}$$

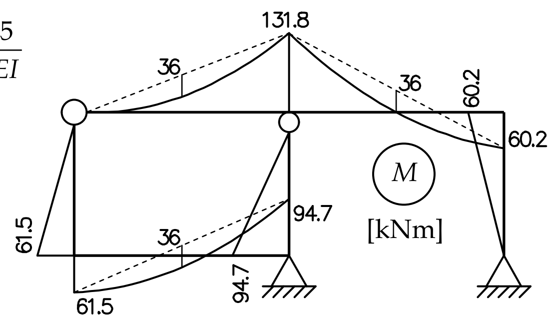
$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\left[2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot6\right)+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot4\right)+1\cdot1\cdot6\right]=+\frac{38}{3EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\cdot\left[2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot6\right)+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot4\right)+1\cdot1\cdot6\right]=+\frac{38}{3EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot6-1\cdot1\cdot6-\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot4+\frac{1}{6}\cdot1\cdot1\cdot6\right]=-\frac{25}{3EI}$$

Momentos Fletores Finais:

$$M=M_0+M_1\cdot X_1+M_2\cdot X_2$$

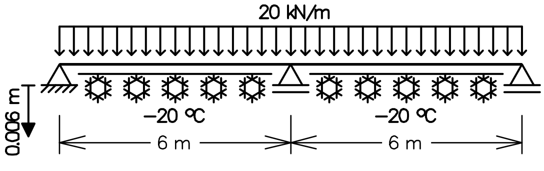


2ª Questão

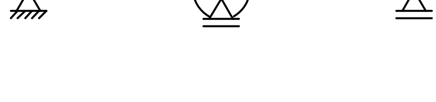
Item (a)

$E=10^8$ kN/m^2 | $\alpha=10^{-5}$/°C | $A=0.12$ m^2 | $I=0.0036$ m^4

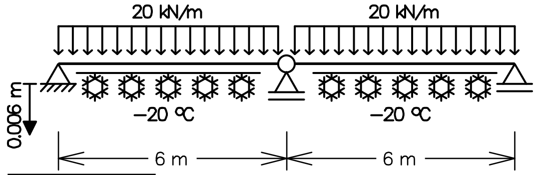
$\Delta T_s=0$ °C | $\Delta T_i=-20$ °C | $h=0.60$ m | $\bar{y}=0.30$ m



Sistema Principal e Hiperestático (g = 1)

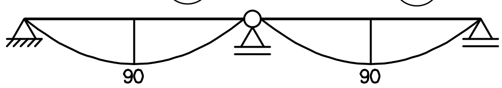


Caso (0) – Solicitações externas isoladas no SP



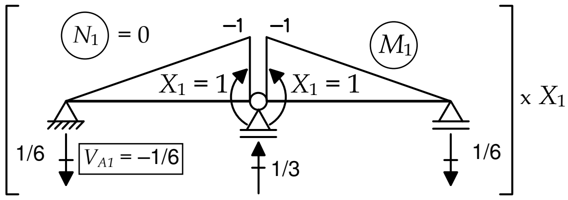
$\rho_{A0} = -0.006$ m

M_0 [kNm] $N_0 = 0$



(Diagrama de momentos fletores do caso (0) só depende da força uniformemente distribuida aplicada, pois variação de temperatura e recalque de apoio não provocam esforços internos no SP isostático)

Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



$$\delta_{11} = \int_{viga} \frac{(M_1)^2}{EI} dx + \int_{viga} \frac{(N_1)^2}{EA} dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 6 \right) \right] = \frac{4}{EI} \qquad \boxed{\delta_{11} = \frac{10}{9} \times 10^{-5} \text{ rad/kNm}}$$

Equação de compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$\delta_{10}^{q} = \frac{1}{EI} \left[2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot 90 \cdot 6 \right) \right] \qquad \boxed{\delta_{10}^{q} = -1 \times 10^{-3} \text{ rad}}$$

$$\delta_{10} = \delta_{10}^{q} + \delta_{10}^{T} + \delta_{10}^{\rho}$$

$$d\theta_0^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot (-20 - 0)}{0.60} dx = -\alpha \cdot \frac{100}{3} \cdot dx$$

$$\delta_{10}^{q} = \int_{viga} \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \int_{viga} \frac{N_1 N_0}{EA} dx$$

$$\delta_{10}^{T} = \int M_1 d\theta_0^T + \int N_1 du_0^T = -\alpha \cdot \frac{100}{3} \cdot \int M_1 dx = -\alpha \cdot \frac{100}{3} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 6 \right) \right]$$

$$\boxed{\delta_{10}^{T} = +2 \times 10^{-3} \text{ rad}}$$

$$\delta_{10}^{T} = \int_{viga} M_1 d\theta_0^T + \int_{viga} N_1 du_0^T$$

$$\delta_{10}^{\rho} = -V_{A1} \cdot \rho_{A0} = -\left[(-1/6) \cdot (-0.006) \right] \qquad \boxed{\delta_{10}^{\rho} = -1 \times 10^{-3} \text{ rad}}$$

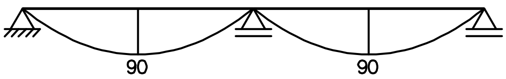
$$1 \cdot \delta_{10}^{\rho} + V_{A1} \cdot \rho_{A0} = 0 \;\Rightarrow\; \delta_{10}^{\rho} = -V_{A1} \cdot \rho_{A0}$$

$$\boxed{\delta_{10} = \delta_{10}^{q} + \delta_{10}^{T} + \delta_{10}^{\rho} = 0}$$

$$X_1 = -\delta_{10} / \delta_{11} \qquad \boxed{X_1 = 0 \text{ kNm}}$$

Momentos fletores finais : $M = M_0 + M_1 \cdot X_1$

M [kNm]



Item (b)

O termo de carga δ_{10} é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula introduzida na criação do Sistema Principal provocada pela força uniformemente distribuida, pela variação de temperatura e pelo recalque vertical no apoio da esquerda, no caso (0).

Item (c)

Do ponto de vista físico, uma estrutura isostática tem o número exato de vínculos (externos e internos) para ser estável. Retirando-se um destes vínculos, a estrutura se torna instável e é definida como *hipostática*. Adicionando-se um vínculo qualquer a mais, este não seria o necessário para dar estabilidade à estrutura, e ela se torna hiperestática. Pode-se observar que pequenas variações na geometria da estrutura isostática (mantendo-se válida a hipótese de pequenos deslocamentos), por não alterarem as equações de equilíbrio, não geram esforços adicionais.

Dessa forma, se os vínculos externos de uma estrutura isostática sofrerem pequenos deslocamentos (recalques de apoio), só gerarão movimentos de corpo rígido das barras, não causando deformações internas e, por conseguinte, não havendo esforços internos. Para estruturas hiperestáticas, entretanto, um movimento de apoio pode induzir deformações nas barras da estrutura, provocando esforços.

Recalques de apoio são solicitações que precisam ser consideradas em estruturas hiperestáticas, podendo acarretar esforços internos que devem ser considerados no dimensionamento da estrutura. O fato de não aparecerem esforços internos em estruturas isostáticas provocados por movimentos de apoio pode ser considerado uma vantagem deste tipo de estrutura.

De forma análoga, deformações provenientes de variações de temperatura provocam deslocamentos sem que apareçam esforços internos em estruturas isostáticas. Intuitivamente, isso pode ser entendido se for observado que a estrutura isostática tem o número estrito de vínculos para impedir seus movimentos, não impedindo, por exemplo, uma pequena variação de comprimento de uma barra associada a um aquecimento. Assim como os recalques de apoio, as variações de temperatura em membros de uma estrutura hiperestática podem induzir esforços que devem ser considerados.