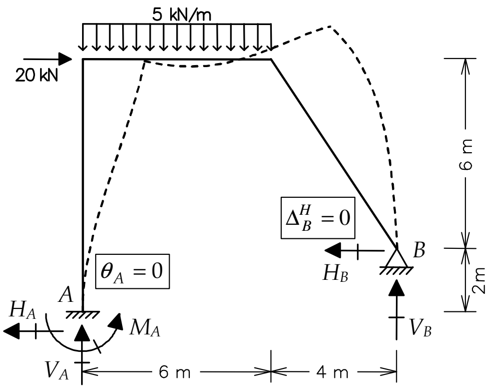
Exemplo de solução de um pórtico com 2 hiperestáticos pelo Método das Forças



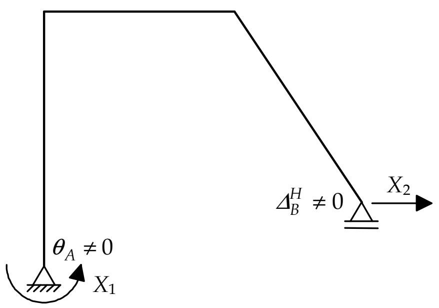
Considere o pórtico mostrado na figura acima com as seguintes propriedades: área da seção transversal das barras: A = 0.005 m²; momento de inércia da seção transversal: I = 0.0005 m⁴; e módulo de elasticidade do material: E = 2x10⁸ kN/m². A configuração deformada está mostrada com um fator de amplificação da escala para os deslocamentos igual a 1000).

A metodologia utilizada pelo Método das Forças para analisar uma estrutura hiperestática é: "somar uma série de soluções básicas que satisfazem as condições de equilíbrio, mas não satisfazem as condições de compatibilidade da estrutura original, para na superposição restabelecer as condições de compatibilidade."

Cada solução básica isoladamente não satisfaz as condições de compatibilidade da estrutura original. Estas condições ficam restabelecidas quando se superpõe todas as soluções básicas.

A estrutura utilizada para a superposição de soluções básicas é uma estrutura isostática obtida a partir da estrutura original pela eliminação de vínculos. Esta estrutura isostática é chamada de *Sistema Principal (SP)*. As forças ou momentos associados aos vínculos liberados são as incógnitas do problema e são chamados de *hiperestáticos*.

O Sistema Principal (*SP*) adotado neste exemplo é a estrutura isostática mostrada na figura abaixo.



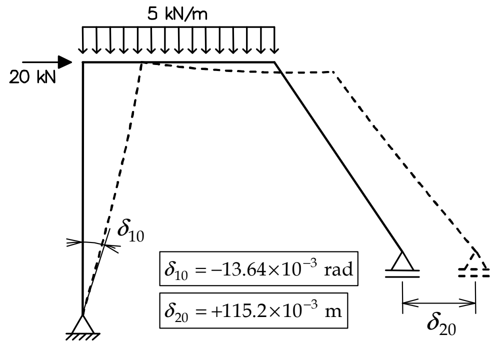
Observa-se que foram eliminados dois vínculos externos da estrutura original: a imposição de rotação θ_A nula do apoio da esquerda e a imposição de deslocamento horizontal Δ_B^H nulo do apoio da direita. O número de vínculos que devem ser eliminados para transformar as estrutura hiperestática original em uma estrutura isostática é igual ao grau de hiperestaticidade, g. A escolha do Sistema Principal é arbitrária: qualquer estrutura isostática escolhida é válida, desde que seja estável estaticamente.

Os esforços associados aos vínculos eliminados são as reações de apoio M_A e H_B, que estão indicadas na figura ao lado. Esses esforços são chamados de *hiperestáticos* e são as incógnitas da solução pelo Método das Forças. Utiliza-se a nomenclatura X_i para indicar os hiperestáticos, sendo i o seu índice, que varia de 1 a g. No exemplo:

$X_1 = M_A$: reação momento associada à restrição $\theta_A = 0$;
$X_2 = H_B$: reação horizontal associada à restrição $\Delta_B^H = 0$.

A solução do problema pelo Método das Forças recai em encontrar os valores X_1 e X_2 que fazem com que, juntamente com o carregamento aplicado, $\theta_A = 0$ e $\Delta_B^H = 0$. A determinação de X_1 e X_2 é feita através de superposição de casos básicos, utilizando o *SP* como estrutura para as soluções básicas. O número de casos básicos é igual a g+1. No exemplo, isso resulta nos casos (0), (1) e (2) que são mostrados a seguir.

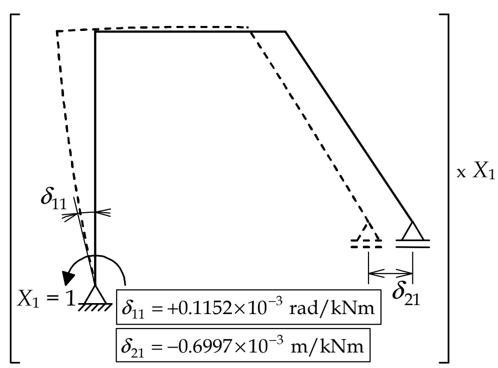
Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SP



A figura acima mostra a configuração deformada (com fator de amplificação igual a 20) do *SP* no caso (0). A rotação δ_{10} e o deslocamento horizontal δ_{20}, nas direções dos vínculos eliminados para a criação do *SP*, são chamados de *termos de carga*, cujos valores para esta estrutura estão indicados na figura.

O sinal negativo da rotação δ_{10} indica que a rotação tem o sentido contrário do que é considerado para o hiperestático X_1 no caso (1) a seguir. Analogamente, o sinal positivo de δ_{20} indica que este deslocamento tem o mesmo sentido que é considerado para o hiperestático X_2 no caso (2) a seguir. O cálculo dos coeficientes que aparecem na formulação do Método das Forças pode ser feito pelo Princípio das Forças Virtuais (PFV).

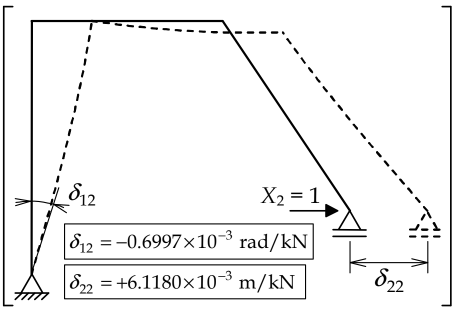
Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



A figura anterior mostra a configuração deformada (com fator de amplificação igual a 2000) do *SP* no caso (1). O hiperestático X_1 é colocado em evidência, já que ele é uma incógnita do problema. Considera-se um valor unitário para X_1, sendo o efeito de $X_1 = 1$ multiplicado pelo valor final que X_1 deverá ter. A rotação δ_{11} e o deslocamento horizontal δ_{21} provocados por $X_1 = 1$, nas direções dos vínculos eliminados para a criação do Sistema Principal, são chamados de *coeficientes de flexibilidade*. Por definição as unidades dos coeficientes de flexibilidade correspondem às unidades de deslocamento ou rotação divididas pela unidade do hiperestático em questão.

Os valores dos coeficientes de flexibilidade do caso (1) estão indicados na figura anterior. O sinal da rotação δ_{11} é positivo pois tem o mesmo sentido do que foi arbitrado para $X_1 = 1$ e o sinal do deslocamento horizontal δ_{21} é negativo pois tem o sentido contrário ao que foi arbitrado para $X_2 = 1$ no caso (2) a seguir. Observe que o sinal dos termos δ_{ii}, sendo i o índice do hiperestático, sempre são positivos, pois são deslocamentos ou rotações nos próprios pontos de aplicação de forças ou momentos unitários aplicados.

Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



A figura acima mostra a configuração deformada (com fator de amplificação igual a 400) do *SP* no caso (2). De maneira análoga ao caso (1), o hiperestático X_2 é colocado em evidência, considerando-se um valor unitário multiplicado pelo seu valor final. A rotação δ_{12} e o deslocamento horizontal δ_{22} provocados por $X_2 = 1$, nas direções dos vínculos eliminados para a criação do *SP*, também são *coeficientes de flexibilidade*. As unidades destes coeficientes, por definição, são unidades de deslocamento ou rotação divididas pela unidade do hiperestático X_2.

Observe que o valor de δ_{12} e δ_{21} são iguais. Isto não é coincidência. Os coeficientes δ_{ij} e δ_{ji}, sendo i e j índices de hiperestáticos, sempre serão iguais. Isso pode ser demonstrado pelo PFV.

A partir dos resultados obtidos nos casos mostrados acima, pode-se utilizar a superposição dos casos para restabelecer as condições de compatibilidade violadas. Isto é feito a seguir.

Somatório das rotações do nó A:

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0$$

Somatório dos deslocamentos horizontais no nó B:

$$\delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0$$

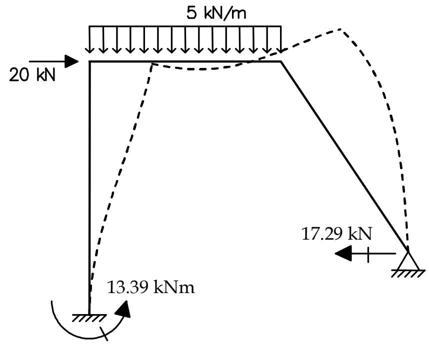
Sistema de equações de compatibilidade:

$$-13.64 \text{x} 10^{-3} + 0.1152 \text{x} 10^{-3} \cdot X_1 - 0.6997 \text{x} 10^{-3} \cdot X_2 = 0$$
$$+115.2 \text{x} 10^{-3} - 0.6997 \text{x} 10^{-3} \cdot X_1 + 6.1180 \text{x} 10^{-3} \cdot X_2 = 0$$

A solução deste sistema de equações de compatibilidade resulta nos seguintes valores das reações de apoio X_1 e X_2:

$X_1 = +13.39$ kNm
$X_2 = -17.29$ kN

O sinal de X_1 é positivo pois tem o mesmo sentido (anti-horário) do que foi arbitrado para $X_1 = 1$ no caso (1) e o sinal de X_2 é negativo pois tem o sentido contrário (da direita para a esquerda) ao que foi arbitrado para $X_2 = 1$ no caso (2), tal como indica a figura abaixo.



Os valores encontrados para X_1 e X_2 fazem com que $\theta_A = 0$ e $\Delta_B^H = 0$. Dessa forma, obteve-se a solução correta da estrutura porque, além de satisfazer as condições de equilíbrio – que sempre são satisfeitas nos casos (0), (1) e (2) –, o modelo estrutural satisfaz as condições de compatibilidade.

A solução da estrutura não termina na obtenção dos valores dos hiperestáticos X_1 e X_2. Após isso, ainda é necessário obter os diagrama de esforços internos e os deslocamentos da estrutura. Existem duas alternativas para isso:

A. Calcula-se uma estrutura isostática (o Sistema Principal) com o carregamento aplicado simultaneamente aos hiperestáticos – com os valores corretos encontrados – como se fossem forças e momentos aplicados.

B. Utiliza-se a própria superposição de casos básicos para a obtenção dos esforços internos (ou deslocamentos) finais.

Embora a primeira opção possa parecer mais simples, a segunda opção é a que vai ser utilizada na maioria das soluções. O motivo para isso é que no cálculo dos valores dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade pelo PFV é necessário o conhecimento dos diagramas de esforços internos dos casos básicos (0), (1) e (2). Portanto, como os diagrama de esforços internos dos casos básicos já estarão disponíveis, os esforços internos finais da estrutura hiperestática original são obtidos por superposição dos esforços internos dos casos básicos. O mesmo se dá para obtenção dos deslocamentos.